# Valeur actuelle de l'acoustique musicale de HELMHOLTZ

L'article qui suit, que j'ai écrit en 1985, comporte une erreur théorique importante, qui le rend "dépassé". Helmholtz supposait que la membrane basilaire de la cochlée (voir dans le développement de l'article) était fortement tendue dans le sens transversal et pouvait donc être assimilée à une suite de cordes vibrantes, un peu comme celles d'un piano. Les travaux de Georg von Bekesy ont montré que cette hypothèse était fausse, la membrane présentant une égalité de mollesse dans toutes les directions. Le fonctionnement de l'oreille comme "analyseur de fréquence" exige donc une autre explication : c'est celle de l'onde propagée (voir ci-dessous un exposé très résumé, extrait de l'article "Acoustique physiologique", de l'*Encyclopedia Universalis*, écrit par Yves Galifret).

Il n'empêche. Du point de vue de l'histoire des sciences, il reste intéressant de savoir que, même en admettant l'hypothèse de Helmholtz, la théorie de ce dernier comporte de nombreuses fautes, théoriques et pratiques, qui lui confèrent un caractère à la fois téméraire et divinatoire. Car, même s'il se trompait, Helmholtz ne disait pas n'importe quoi et sa théorie, peut-être plus que toute autre, a fait grandement avancer la compréhension de la perception musicale.

## Extrait de l'article d'Yves Galifret

**Comment les vibrations sonores agissent-elles sur la cochlée?**

*La théorie de la résonance*. Dès 1683, du Verney exprimait l'idée que la stimulation de l'oreille pourrait se faire par résonance, les sons graves faisant vibrer la lame osseuse spirale à la base de la cochlée et les sons aigus au sommet. Cotugno, en 1760, considérant que la structure susceptible de vibrer devait être la plus flexible et non la plus rigide, était amené à rectifier la distribution des fréquences dans la cochlée. Un siècle plus tard, Hensen (1863) précisait que la structure flexible la plus susceptible d'entrer en résonance était la membrane basilaire. À la même époque, Helmholtz défend également l'hypothèse de la résonance mais, curieusement, dans la première formulation de sa théorie, en 1863, c'est aux piliers de Corti qu'il assigne le rôle de résonateurs : «Le marquis de Corti a découvert des organes très remarquables, de petites plaques microscopiques innombrables, rangées régulièrement les unes à côté des autres comme les touches d'un piano [...] ce sont là probablement les parties susceptibles de vibrer.» Plus tard, se fondant sur la description qu'Hensen faisait de la membrane basilaire, il en conclut qu'on pouvait la considérer comme une succession de cordes faiblement liées les unes aux autres et propres à vibrer sous l'influence d'une stimulation de fréquence convenable. En réalité, comme l'a montré von Bekesy, et c'est là une constatation d'importance, la membrane basilaire n'est pas tendue, il ne faut donc pas la voir comme une suite de cordes vibrantes, «mais plutôt comme une masse formée de couches gélatineuses de nature variée». En conséquence elle n'a pas de vibration propre et ses mouvements ne peuvent être que passifs, provoqués par les mouvements des liquides cochléaires.

*L'onde propagée*. Georg von Bekesy (prix Nobel 1961) fut un expérimentateur remarquable et, grâce à lui, l'étude des mécanismes cochléaires est passée de la spéculation théorique à l'analyse expérimentale. Ses travaux, poursuivis de 1928 jusqu'à sa mort en 1972, sont à l'origine de ce que nous connaissons du fonctionnement de l'oreille et nous lui devons en particulier la découverte de l'onde propagée.

Un déplacement rapide de la plaque de l'étrier se transmet, par les liquides, à la membrane de Reissner, à la membrane basilaire puis à la membrane de la fenêtre ronde, laquelle «sort» lorsque la plaque de l'étrier «entre», et inversement (fig. 6 a). Une vibration de l'étrier va donc provoquer une vibration de la membrane basilaire entraînée par le mouvement des liquides. Du fait de sa structure, la membrane basilaire est beaucoup plus rigide à la base qu'au sommet; pour une même pression continue la déformation au sommet est cent fois plus grande qu'à la base. Il s'ensuit que les oscillations de pression dans la rampe vestibulaire se traduisent au niveau de la membrane basilaire par une «onde propagée» progressant de la base vers l'apex avec une amplitude croissante, puis brusquement décroissante, au-delà d'un maximum dont la position est fonction de la fréquence de stimulation (fig. 6 b et c). On a pu ainsi établir une carte de la distribution des maximums sur la membrane basilaire (tonotopie cochléaire), les fréquences élevées à la base et les fréquences basses à l'apex (fig. 6 d). Le résultat est donc celui qui était prévu par Helmholtz, mais le mécanisme est différent de celui qu'il avait imaginé.

# VALEUR ACTUELLE DE L'ACOUSTIQUE MUSICALE DE HELMHOLTZ*

Patrice BAILHACHE (Nantes)

L'ouvrage original de Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, parut en 1863 et fut traduit en français dès 1868, sous le titre assez infidèle : *Théorie physiologique de la musique fondée sur l'étude des sensations auditives*[1]. Le livre, en allemand comme en français, et aussi en anglais, connut ensuite de nombreuses éditions[2]. Sur la qualité assez contestable de la traduction française, nous ne voulons pas ici nous étendre. Outre les classiques contresens, inévitables dans un travail de ce genre, il semble qu'un certain parti pris de «faire du style» ait conduit le traducteur à trop souvent préférer une sorte de musique du discours à la précision de la pensée (par ex. mots allemands identiques traduits par deux mots français différents pour éviter la répétition, *Vorstellungen von äußeren Objekten* rendu par «notions sur les objets extérieurs», *Generalbaß* et *Tonmalerei* uniformément transcrits par le simple mot «harmonie», etc.).

Sur l'ensemble du contenu de l'ouvrage, nous ne pouvons pas non plus donner ici un compte rendu complet, qui dépasserait les limites raisonnables d'un article ordinaire d'*Histoire des sciences*. Contentons-nous de signaler que nous sommes en train de refaire la traduction du livre de Helmholtz, qui sera accompagnée d'un commentaire historique et scientifique approprié.

Nous allons donc concentrer toute notre attention sur l'hypothèse physiologique fondamentale et ses principales conséquences, qui ont permis à Helmholtz de trouver une «explication» à la musique, à l'harmonie; nous montrerons, comme il l'a fait lui-même, combien la théorie ainsi développée est meilleure, plus riche, plus proche de la réalité, que les théories précédentes de Euler, de Rameau et d'Alembert; nous montrerons surtout (c'est en cela que cet article peut présenter quelque intérêt) dans quelles limites la théorie de Helmholtz peut être considérée comme vraie, quelles en sont les lacunes, les faiblesses, les défauts et les erreurs. Finalement, en précisant ce que la science actuelle permet d'améliorer ou de remplacer, nous essaierons de montrer que l'ouvrage de Helmholtz reste encore aujourd'hui d'une grande valeur pour la théorie de la musique.

L'hypothèse physiologique fondamentale est celle du fonctionnement de l'oreille humaine, fonctionnement que Helmholtz est le premier à avoir compris ou deviné dans son

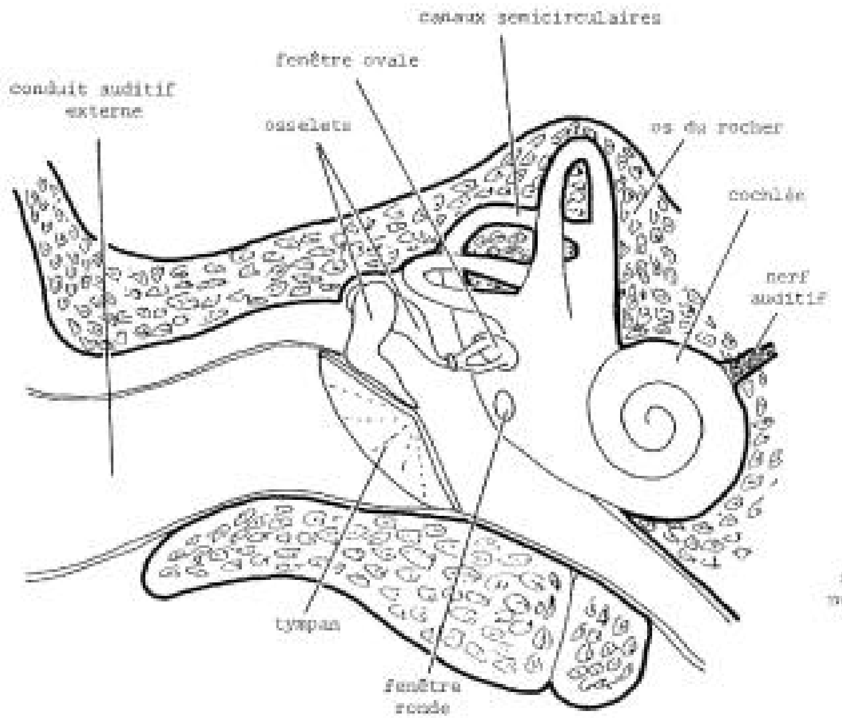
---

[1] Une traduction plus littérale du titre serait plutôt : *La science des sensations sonores comme fondement physiologique de la théorie de la musique*.

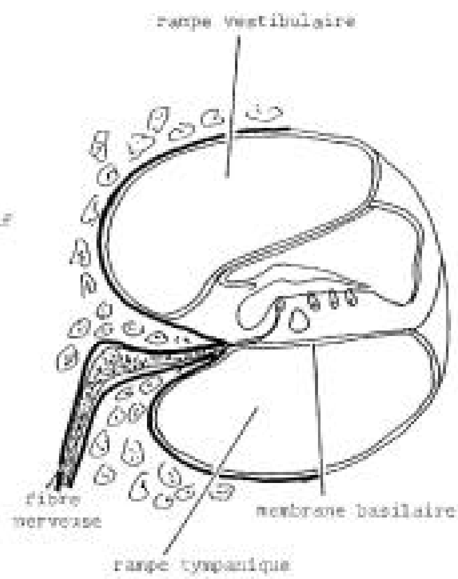
[2] Le traducteur français est un certain G. Guéroult, ancien élève de l'Ecole polytechnique (rédacteur en chef de l'*Opinion nationale*, précise la 2e édition, de 1874). La 1re édition ajoute que l'ouvrage a été traduit «avec le concours pour la partie musicale de M. Wolff, de la maison Pleyel, Wolff & Cie». Cette mention disparaît dans la 2e édition.

* Publié dans la *Revue d'Histoire des Sciences*, 1986, XXXIX/4, pp. 301-324.

ensemble. Les vibrations sonores de l'air, passant dans le *conduit auditif*, ébranlent le *tympan*, lequel transmet son mouvement à la *fenêtre ovale* (une membrane) par l'intermédiaire des osselets; outre cette fonction de transmission, ceux-ci jouent un rôle de limitation en cas de vibrations excessives. Les vibrations parviennent ainsi dans l'oreille interne, une cavité creusée dans l'*os du rocher*, comprenant le *vestibule*, les *canaux semi-circulaires* et la *cochlée* (le *limaçon*). L'audition se fait par cette dernière; c'est un organe qui contient en quelque sorte tout le secret de la sensation sonore.




*ensemble de l'appareil auditif*




*coupe du conduit du limaçon*

La cochlée est un conduit enroulé sur deux tours et demi, allant en s'évasant vers le sommet (contrairement au cas d'une coquille d'escargot) et divisé sur toute sa longueur principalement en deux conduits, ou *rampes*, par la *membrane basilaire*; la seule communication entre les deux rampes se situe au sommet du limaçon. La fenêtre ovale, vibrant grâce aux osselets, communique avec la *rampe vestibulaire*, tandis qu'une autre membrane, la *fenêtre ronde*, se trouve au début de l'autre rampe, la *rampe tympanique*. Toute la cochlée est remplie d'un liquide. Ainsi une pression sur la fenêtre ovale se transmet-elle à tout ce liquide, agissant sur la membrane basilaire qui sépare les deux rampes cochléaires, et dilatant finalement la fenêtre ronde, laquelle se comporte comme une «soupape de pression». En définitive, l'essentiel est que les vibrations de l'air extérieur soient transmises au liquide de l'oreille interne et excitent ainsi la membrane basilaire.

Peu de temps avant les travaux acoustiques de Helmholtz, le marquis de Corti avait découvert, par l'étude au microscope, que le nerf auditif se ramifie et se termine par une multitude de prolongements sur la membrane basilaire (d'où le terme d'*organes de Corti*, donné à ces prolongements). Cette membrane est très tendue dans le sens transversal, mais peu dans le sens longitudinal (c'est-à-dire celui de l'enroulement du limaçon) : on peut la considérer comme mécaniquement équivalente à un très grand nombre de fibres tendues, juxtaposées les unes aux autres.

Tout ceci posé, l'hypothèse physiologique de Helmholtz consiste à considérer que chacune de ces fibres est «accordée» à une fréquence donnée et vibre par influence, d'autant mieux que la fréquence excitatrice est plus voisine de sa fréquence propre. C'est ainsi que la membrane jouerait le rôle d'analyseur en fréquence des sons reçus. Helmholtz, en 1863, connaissait bien sûr la théorie des *séries de Fourier*, il connaissait en outre l'application qu'avait imaginé d'en faire G.S. Ohm à l'analyse des sons : un son *simple* correspond à une vibration de forme sinusoïdale et tout son *complexe* périodique se décompose mathématiquement en une somme de sons simples : les sons *partiels harmoniques* du son complexe. Helmholtz affirme encore que cette décomposition existe bien *dans la réalité*, car le phénomène de la vibration par influence entraîne qu'un son complexe provoque effectivement la vibration d'un corps accordé à la fréquence de l'un de ses harmoniques; c'est exactement ce qui se passe dans la cochlée de l'oreille humaine. Et en effet certains phénomènes de l'audition viennent corroborer l'hypothèse physiologique de Helmholtz, qui est aujourd'hui largement vérifiée.

Pour tenter de comprendre scientifiquement la musique, il est indispensable d'étudier les phénomènes qui se produisent lors de l'audition simultanée de *plusieurs* sons. Ceci est évident en ce qui concerne la musique que Helmholtz qualifie de «moderne», c'est-à-dire celle de son temps, la musique harmonique tonale, mais la même chose vaut encore dans le cas de n'importe quelle musique polyphonique postérieure à Helmholtz (la musique atonale) ou antérieure (la polyphonie du Moyen Age). Il est moins évident que l'analyse soit encore valable en ce qui concerne la musique monodique ou homophonique (comme le chant grégorien) et cependant Helmholtz le croit, car les sons, s'ils ne sont pas entendus simultanément, n'en sont pas moins comparés entre eux grâce à la mémoire; certes les phénomènes dus à la simultanéité des sons ne se produisent pas, mais certains d'entre eux sont imaginés. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que l'émission d'*accords musicaux* fut très tôt essayée : les Grecs de l'Antiquité ne toléraient ainsi que l'octave, estimant dissonant tout autre intervalle, même la quinte. Mais certes, Helmholtz reconnaît que sa théorie prend pleinement effet lorsqu'il s'agit de la musique harmonique tonale. Et selon lui, la théorie explique même en partie l'évolution historique qui a conduit à cette musique.

Les phénomènes en question sont de deux types : ce sont les *sons résultants* d'une part, les *battements* d'autre part. Les premiers consistent en ce que, lors de l'émission simultanée de deux sons de fréquences $f_1$ et $f_2$, on entend s'ajouter - surtout en cas de sons forts - des sons de fréquences $|f_1 - f_2|$, $|f_1 + f_2|$, $|2 f_1 - f_2|$, $|2 f_2 - f_1|$, $|2 f_1 + f_2|$ etc. En réalité, seul le premier de toute cette série est nettement perceptible, comme le reconnaît

Helmholtz lui-même[3]. En annexe de son livre, Helmholtz donne une théorie mathématique simple des sons résultants. Il montre qu'ils se produisent lorsque le corps vibrant par influence - que ce corps soit un objet extérieur ou le tympan de l'oreille - ne suit pas la loi linéaire de l'oscillateur harmonique (Helmholtz néglige l'amortissement), autrement dit lorsque la force de rappel du corps vibrant n'est pas proportionnelle au déplacement. La théorie des sons résultants est intéressante car elle permet d'expliquer la moins grande consonance de l'accord parfait mineur que celle de l'accord majeur, et bien d'autres phénomènes musicaux analogues[4]. Excepté le fait que les sons résultants n'existent pas pour les sons faibles, aucune critique ne peut être opposée à Helmholtz, qui est le premier - et semble-t-il aussi le dernier - à avoir exploité méthodiquement et scientifiquement ce phénomène à des fins d'analyse musicale.

Aussi est-ce sur le second groupe de phénomènes que nous focaliserons notre attention. Il s'agit de celui, bien connu (au moins le croit-on[5]), des *battements*. Helmholtz fonde sa théorie de la consonance et de la dissonance avant tout sur ce phénomène; et puisque ceci lui fournit la base physiologique à partir de laquelle sa théorie de la musique est esquissée, on peut dire que tout repose finalement sur sa théorie des battements.

Concernant la perception musicale, ce qu'il importe de bien comprendre, c'est que les battements ne constituent pas seulement un phénomène possible extérieur à notre corps. Au contraire, *pour être percus comme tels, les battements doivent avoir lieu dans l'oreille interne elle-même*: des fibres de la membrane basilaire doivent battre, faute de quoi la perception sera seulement celle de deux sons simples séparés[6].

Nous allons maintenant exposer les calculs de Helmholtz sous une forme aussi simplifiée que possible, en montrant sur quelles hypothèses ils reposent. Nous donnerons ensuite quelques détails et mentionnerons les erreurs et les négligences commises par Helmholtz. Nous expliquerons aussi ce que les connaissances actuelles de l'acoustique permettent de reconnaître comme erroné dans ses calculs.

---

[3] Ce phénomène semble avoir été découvert indépendamment par l'organiste allemand Sorge en 1740 et par le violoniste italien Tartini (*Trattato di musica secondo la vera scienza dell'armonia*, 1754 - traité qui s'appuie entre autres sur les *terzi tuoni*, les «troisièmes sons», c'est-à-dire le premier différentiel des sons résultants).

[4] Dans l'accord *do mi sol*, les seuls sons résultants sont des *do* graves, parfaitement consonants avec les notes de l'accord. Avec *do mib sol*, en revanche, on obtient *do*, *mib*, *lab*, graves. Cette dernière note est étrangère à celle de l'accord et, malgré une distance de presque trois octaves, «jure» avec le *sol*.

[5] On l'étudie dans les classes secondaires, mais seulement pour le cas simple où les amplitudes des deux vibrations sinusoïdales sont égales, ce qui produit une annulation périodique de la vibration totale. Comme la fréquence des battements est égale à la différence des fréquences des vibrations données, les physiciens ont souvent tendance à confondre les premiers sons résultants différentiels avec les battements, au moins pour les fréquences de battements suffisamment grandes; Helmholtz cite le cas de Th. Young, mais il démontre clairement que ceci est une erreur.

[6] On percevra les deux sons si du moins une certaine éducation nous a appris à séparer psychologiquement nos perceptions auditives. Les pages de Helmholtz sur ce sujet sont très belles et très fortes. Quand un chien aboie, on ne perçoit ordinairement qu'un aboiement de chien et non tout le spectre des sons simples que cet aboiement contient.

Soit donc *m* la masse d'une fibre résonante de la membrane basilaire. Son mouvement obéit à l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k'\frac{dx}{dt} + kx = f(x) \qquad (1)$$

$f(x)$ est la force périodique excitatrice résultant du mouvement du liquide de la cochlée. Si $f(x)$ est nulle, le mouvement est celui de l'oscillateur harmonique amorti. Et s'il n'y avait pas d'amortissement ($k' = 0$), on sait que la pulsation (fréquence multipliée par 2π) serait :

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

La pseudo-pulsation du mouvement amorti est, pour les valeurs physiquement vraisemblables de $k'$, voisine de $\omega_0$ : elle définit donc la fréquence propre $f_0 = \omega_0/2\pi$ de la fibre.

Maintenant, si l'excitation est celle d'un son simple :

$f(x) = \mathrm{F}\sin\omega t$,

l'équation (1) conduit alors à la solution :

$$x = \frac{\mathrm{F}}{m\sqrt{\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega^2 + (\omega_0^2\ -\ \omega^2)^2}}\ \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

avec $\alpha = k'/m\omega_0$ coefficient d'amortissement réduit et φ l'angle tel que $\tan\varphi = -k'\omega/(\mathrm{k} - m\omega^2)$.

On peut calculer la fonction vitesse $v = dx/dt$ et en déduire la vitesse maximale dans une période :

$$v_{\max} = \mathrm{V} = \frac{\omega\mathrm{F}}{m\sqrt{\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega^2 + (\omega_0^2\ -\ \omega^2)^2}} \qquad (3)$$

Dans le cas des battements de deux sons simples, la fonction $f(x)$ s'écrit :

$f(x) = \mathrm{F}_1\sin\omega_1 t + \mathrm{F}_2\sin(\omega_2 t + \psi)$.

L'équation (1) étant linéaire, la solution est la somme de deux solutions de la forme (2). Ainsi la vitesse vaut-elle dans ce cas :

$$v = \mathrm{V}_1\sin\omega_1 t + \mathrm{V}_2\sin(\omega_2 t + \chi) \qquad (4)$$

où $\mathrm{V}_1$ et $\mathrm{V}_2$ ont la forme (3) et où $\chi = \mathrm{cte}$.

Helmholtz montre alors que (4) équivaut mathématiquement à :

$\mathrm{v} = \mathrm{V}\sin(\omega_1 t - \varepsilon)$

avec $\mathrm{V}^2 = + 2\,\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2\cos a +$

et $\tan\varepsilon = \mathrm{V}_2\sin a/(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2\cos a)$, $a = (\omega_1 - \omega_2)\,t - \chi$.

Tout se passe donc comme si le mouvement se produisait avec une pulsation fluctuant autour de $\omega_1$ (ε variable, périodique) et avec une vitesse maximale dont le carré variait entre les limites $\mathrm{V}_1^2 - 2\,\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_2^2$ et $\mathrm{V}_1^2 + 2\,\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_2^2$, donc avec l'amplitude $4\,\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2$. or, remarque Helmholtz, $1/2\,m\mathrm{V}^2$ mesurant l'énergie de la fibre, il est logique de considérer l'amplitude de variation de cette énergie comme l'amplitude même des battements (ceci présuppose donc que l'intensité perçue des battements est proportionnelle à cette énergie - hypothèse contestable sur laquelle nous reviendrons). Nous pouvons donc dire que $2mV_1\ V_2$ représente l'énergie des battements de la fibre de l'oreille de pulsation propre $\omega_0$. Compte tenu de (3), on a :

Eb = énergie des battements

$$= \frac{2\omega_1\,\omega_2\,F_1\,F_2}{m\sqrt{[\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega_1^2 + (\omega_0^2\ -\ \omega_1^2)^2]\,[\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega_2^2 + (\omega_0^2\ -\ \omega_2^2)^2]}} \qquad (5)$$

Le but de Helmholtz est de trouver *une mesure quantifiée de la dissonance,* impression qui, selon lui, se trouve intimement liée au phénomène des battements. Dans de nombreuses pages, il s'emploie à convaincre que c'est bien le caractère discontinu des battements qui est la cause du désagrément de la sensation, la cause de la dissonance (dans la vision aussi, remarque-t-il, la discontinuité crée le désagrément). Ainsi, l'énergie de battement nous achemine vers la quantification souhaitée. Cependant Helmholtz a parfaitement conscience que cette énergie, à elle seule, ne peut convenir comme mesure de la dissonance[7]. Car des battements très lents (période supérieure à une seconde) ne produisent aucune impression de dissonance, alors que leur énergie ne tend pas du tout vers zéro lorsque $\omega_2$ s'approche de $\omega_1$, mais atteint un maximum. Il doit donc exister un facteur, fonction de la fréquence des battements, qui en multiplication avec l'énergie des battements fournit la mesure de la dissonance.

En réalité, le problème est fort complexe, même réellement insoluble rigoureusement, Helmholtz le sait très bien. Car l'énergie (5) calculée ci-dessus n'est que celle d'*une* fibre de la membrane basilaire. Or la perception des battements doit évidemment dépendre des battements produits sur *toutes* les fibres. Dans ses calculs, Helmholtz prend $\omega_2$ très peu différent de $\omega_1$ et se limite à la seule fibre de fréquence propre $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. La fonction (5) est en effet le produit de deux fonctions de $\omega_0$ de la forme :

$$\frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega^2 + (\omega_0^2\ -\ \omega^2)^2}} \qquad (6)$$

(avec $\omega = \omega_1$ ou $\omega_2$), qui atteignent leur maximum pour $\omega_0 = \omega_1$ ou $\omega_2$. La fonction (5) n'est

[7] C'est donc une erreur d'interprétation d'écrire comme J.-R. Pierce : «Au XIXe siècle, Helmholtz tenta d'expliquer la consonance et l'harmonie uniquement en termes de battements. Il pensait que des intervalles étaient consonants s'il n'y avait pas (ou peu) de battements entre leurs partiels. Pour les intervalles dissonants, il expliquait que les partiels des différents sons avaient des fréquences si proches les unes des autres que le battement entre ces partiels était perçu comme une dissonance.»
«Les travaux de Plomp (1976) et d'autres ont fait apparaître que ce point de vue était trop simple. Des battements lents ne donnent pas l'impression de dissonance...» (in *Le son musical*, coll. “Pour la science”, Paris. Belin, 1984, p. 76). Ce fait, que nous soulignons et qui est présenté par son auteur comme une critique de Helmholtz, n'entame pas la véracité de la théorie de ce dernier, puisque Helmholtz en tient justement compte dans sa définition de la dissonance.

donc appréciable, affirme Helmholtz, que lorsque les deux maxima se conjuguent, c'est-à-dire pour $\omega_2$ peu différent de $\omega_1$ et dans la fibre de pulsation $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

> «Des battements plus faibles pourront encore, il est vrai, reconnaît Helmholtz, se produire dans des arcs fibreux voisins, mais avec une intensité rapidement décroissante. Aussi pourrait-on considérer comme plus exact d'intégrer, par rapport à [$\omega_0$] la valeur [de (5)], de manière à avoir la somme des battements dans tous les organes de Corti. Mais il faudrait alors avoir une idée au moins approximative de la densité des organes de Corti pour différentes valeurs de [$\omega_0$], c'est-à-dire pour différentes régions de la gamme, et c'est ce qui nous manque. En tout cas, dans la sensation, il est plus important de considérer le plus haut degré de dureté que la répartition d'une moindre dureté sur un grand nombre d'organes sentants. C'est ce qui m'a décidé à ne prendre en considération que le maximum des battements [exprimé par notre formule (5) ]»[8].

A y réfléchir tant soit peu, ce raisonnement apparemment séduisant contient au moins deux erreurs, mais peut-être aussi une intuition remarquablement astucieuse, que nous allons expliquer et qui fait presque l'essentiel de la question.

La première erreur, la moindre, est que (5) n'a pas qu'un seul maximum, mais deux, au voisinage de $\omega_1$ et de $\omega_2$. Cependant, comme Helmholtz se limite à $\omega_2$ peu différent de $\omega_1$, il paraît en droit de fondre ces maxima en une seule valeur.

La seconde touche — on s'en doute — à la négligence de l'intégration des battements sur toutes les fibres de l'oreille. Dire qu' «il est plus important de considérer le plus haut degré de dureté que la répartition d'une moindre dureté sur un grand nombre d'organes sentants», cela semble un véritable sophisme. Bien évidemment, l'intégration d'une fonction de faible valeur sur un grand intervalle peut fort bien donner un résultat aussi grand, voire plus grand, que celle d'une fonction de grande valeur limitée à un petit intervalle. Quant à l'excuse invoquée par Helmholtz pour justifier sa négligence de l'intégration, à savoir son ignorance complète de la répartition des fibres dans la membrane basilaire («et c'est ce qui nous manque»), elle n'est peut-être pas de la plus grande bonne foi. Certes, les coupes anatomiques ne permettaient pas encore à son époque de déterminer cette répartition[9], mais l'expérience auditive à elle seule pouvait déjà justement en donner une idée approximative. Dans le médium, sur un intervalle de trois octaves au moins (500 à 2000 Hz), les propriétés de l'oreille sont assez constantes : on peut donc supposer avec vraisemblance que la répartition des fibres est la même d'une octave à l'autre. Cela veut dire que la densité est alors constante pour n'importe quel intervalle donné (tierce, quarte, quinte ou tout autre) dans ces trois octaves; cela s'écrit, *r* figurant le rapport de l'intervalle considéré et D(ω) la densité cherchée :

$$\int_{\omega_0}^{r\omega_0} D(\omega)\, d\omega = \mathcal{D}(r\,\omega_0) - \mathcal{D}(\omega_0) = \text{cte} \quad \text{quel que soit } \omega_0.$$

[8] p. 528 de la trad. fr. de Guéroult (1868).

[9] En 1863, Helmholtz, d'après Kolliker, estime à 3000 le nombre des fibres de Corti; on sait aujourd'hui qu'il y en a environ 24000 (cf. p. 183 de l'édition fr. citée).

Cette égalité n'est possible que si la primitive $\mathcal{D}$ de D est proportionnelle à la fonction logarithme. D'où la densité :

$$D(\omega) = cte/\ \omega \qquad (7)$$

Aujourd'hui l'anatomie confirme cette densité pour les quelques octaves du médium; Helmholtz, qui ignorait ce genre de confirmation, pouvait néanmoins très bien reconnaître le bien-fondé de cette hypothèse[10]. Mais ce qu'il était aussi parfaitement en mesure de deviner, c'est que le calcul avec intégration ruinerait en grande partie sa théorie, car il était intuitif que l'étalement de la dissonance sur toute la membrane basilaire affaiblissait considérablement la sélectivité des intervalles musicaux quant à leur degré de consonance (nous expliquerons cela plus loin clairement par un calcul). Aussi convient-il de souligner que sa dernière phrase que nous avons citée commence par la précision *«dans la sensation»*. Helmholtz était assez bon mathématicien pour savoir que l'intégrale d'une fonction presque partout faible n'est nullement négligeable à côté du pic que la fonction présente dans un endroit restreint. *Nous suggérons ici que sa précision «dans la sensation» fait implicitement référence au phénomène du seuil* : en deçà d'une certaine valeur, l'intensité des battements ne contribue à aucune sensation, si bien que l'intégrale des petites valeurs sera réellement négligeable. Ce qui paraissait être une erreur mathématique devient ainsi une vérité physiologique. De toute manière, il faut d'ailleurs reconnaître que la théorie de Helmholtz produit un résultat d'une grande vraisemblance, ainsi que nous allons l'expliquer plus bas.

Revenons maintenant à la mesure chez Helmholtz de la dissonance. Il faut trouver (cf. ci-dessus le paragraphe suivant la formule (5) ) la fonction de la fréquence des battements — appelons-la la *dureté propre* pour fixer les idées — qui, en multiplication avec l'énergie des battements, fournit la mesure de la dissonance. Aucun indice théorique ne venant nous aider, c'est par l'expérience seule, en principe, que cette fonction peut être trouvée. Or nous voyons ici que Helmholtz n'a pas cherché à réaliser l'expérience précise qui eut été nécessaire. Ce qu'il aurait fallu faire, c'était varier la fréquence des battements en maintenant constante leur énergie. Evaluer cette énergie (intérieure à l'oreille) n'était pas une chose aisée, mais tout de même grossièrement réalisable. Des énergies de deux sons battants, en effet, et de leur distance en fréquence, on pouvait déduire celle des battements[11].

Il ne restait plus alors qu'à diviser la mesure subjective de la dissonance par cette énergie pour obtenir la *dureté propre* cherchée. Au lieu de quoi, sans aucune mesure précise,

---

[10] Il la sous-entend du reste lorsqu'il calcule le nombre de fibres pour un demi-ton (p. 183).

[11] D'après (3), l'énergie d'un son dans l'oreille est

$$E = 1/2\, mV^2 = \omega^2\ F^2/m[\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega^2 + (\omega_0^2\ -\ \omega^2)^2\ ]$$

dont le maxinum est atteint pour $\omega_0 = \omega$ : $E_{max} = F^2/m\ \alpha^2\ \omega^2]$. Puisque Helmholtz considérait $\alpha$ comme constant et connu (cf. *infra*), de $E_{1\,max}$ et $E_{2\,max}$ il pouvait tirer $F_1F_2/m$, quantité qui, reportée dans (5) où $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_0 \approx (\omega_1 + \omega_2)/2$ sont connus, lui donnait l'énergie des battements.

Helmholtz se contente de constater que nous percevons des battements au moins jusqu'à la fréquence de 132 périodes par seconde et que «la dureté la plus perçante se produit dans les parties élevées de la gamme pour un nombre de 30 à 40 battements » (p. 217). Il pense qu'au-delà de 132 intermittences sonores la fusion des sensations commence à s'opérer, comme a lieu pour l'œil celle des sensations visuelles dès la fréquence de 24 images par seconde (p. 220). La dureté propre doit donc être selon lui une fonction de la fréquence des battements $\Delta f$ (différence des fréquences des sons battants), nulle dans le cas $\Delta f = 0$, maximale pour $\Delta f$ voisine de 30, et tendant vers zéro lorsque $\Delta f$ augmente indéfiniment. Il prend, aux notations près :

$$dp = \text{dureté propre} = \left[\frac{60\ \Delta f}{(30)^2 + \Delta f^2}\right]^2 \qquad (8)$$

fonction dont le maximum vaut 1 lorsque $\Delta f = 30$. «C'est l'expression la plus simple qui remplisse les conditions données, mais elle est naturellement arbitraire jusqu'à un certain point», reconnaît-il (p. 528). Ainsi, $\mathrm{E}b_{\mathrm{max}}$ représentant le maximum selon $\omega_0$ de l'énergie des battements (5), la *dissonance* de deux sons simples est prise par Helmholtz égale à :

$$\mathrm{Ds} = \mathrm{E}b_{\mathrm{max}} \times dp$$

## DISSONANCE DE DEUX SONS COMPLEXES

Ceci trouvé, il est facile d'en déduire la dissonance de deux sons complexes : on prend deux à deux tous les harmoniques de ces deux sons et pour chaque couple on calcule Ds. La sommation de ces dissonances élémentaires donne la dissonance globale cherchée. Aussi le résultat dépend-il du *timbre* de chaque son. Helmholtz fait un calcul pour ce qu'il prétend être le timbre du violon et, tenant compte des neuf premiers harmoniques, parvient ainsi à une courbe générale de dissonance sur laquelle toute la suite de sa théorie de la musique va être fondée[12]. On a pour deux sons complexes :

$$\mathrm{F}_1 \sin \omega t + \mathrm{F}_2 \sin (2\omega t + \psi_2) + \ldots + \mathrm{F}_n \sin (n\omega t + \psi_n) + \ldots$$

$$\mathrm{F}'_1 \sin \omega' t + \mathrm{F}'_2 \sin (2\omega' t + \psi'_2) + \ldots + \mathrm{F}'_n \sin (n\omega' t + \psi'_n) + \ldots$$

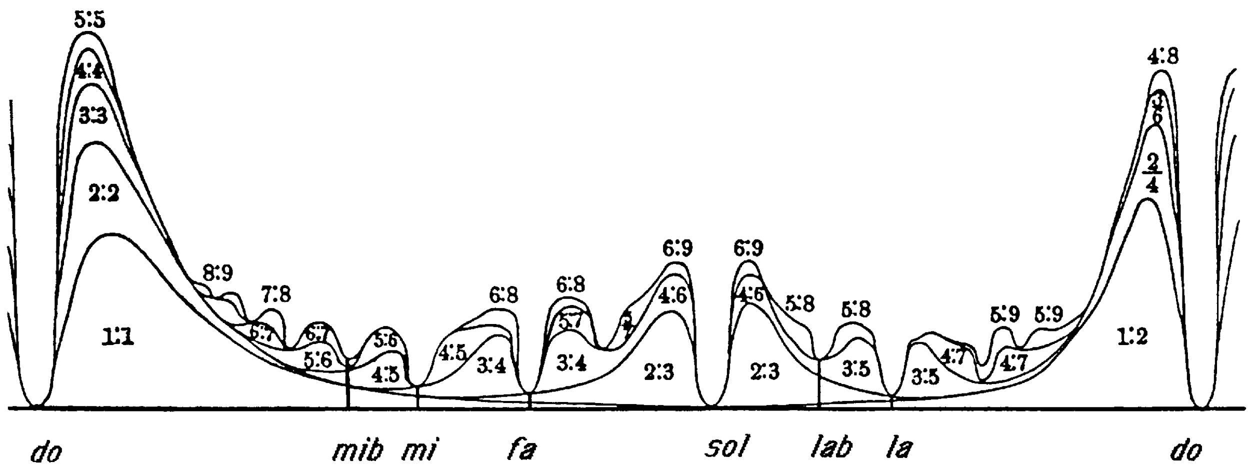
donnant la dissonance globale (d'après (5) et (8) ) :

[12] Helmholtz prend non le timbre du violon *tel qu'on l'entend*, mais celui de la vibration de ses cordes, ce qui est très différent, la résonance de la table d'harmonie et de la caisse apportant beaucoup de modifications.

$$\mathrm{Ds} = \sum_{n,n'} \frac{2nn'\,\omega\omega'\,F_n\,F'_n}{m\sqrt{[\alpha^2\;\omega_0^2\,n^2\omega^2 + (\omega_0^2\;\;-\;n^2\omega^2)]\,[\alpha^2\;\omega_0^2\,n'^2\omega'^2 + (\omega_0^2\;\;-\;n'^2\omega'^2)]}}$$

$$\times\left[\frac{60\;\Delta f}{(30)^2 + \Delta f^2}\right]^2 \qquad (10)$$

avec $\omega_0 = (n\,\omega + n'\,\omega')/2$ et $\Delta f = |n'\,\omega' - n\,\omega|\,/2\pi$[13].




La figure indique les contributions à la dissonance pour chaque couple d'harmoniques pris dans les deux sons complexes. Il faut comprendre que ces contributions produisent des ordonnées qui s'ajoutent successivement les unes aux autres. Ainsi, la dissonance des deux sons fondamentaux (premiers harmoniques) donne la première ordonnée (marquée 1:1) au-dessus de l'axe des abscisses : elle croit après *do* pour atteindre un maximum et diminuer ensuite uniformément; la dissonance du fondamental du deuxième son avec le deuxième harmonique du premier son donne une seconde ordonnée (marquée 1:2) *qui s'ajoute à la précédente* (les chiffres indiquent l'ordre des harmoniques); de même pour les dissonances suivantes (2:3, 3:2, etc.). Afin d'avoir un repérage aisé, Helmholtz a choisi comme fondamental du premier son la fréquence du *do*$_3$ (264 Hz pour la note juste par rapport au *la*$_3$ de 440 Hz). On constate que les résultats concordent bien avec ce que notre subjectivité nous apprend sur la nature des accords de deux sons. Dans l'ordre décroissant de consonance, les intervalles se classent selon la manière ordinaire : unisson (*do*), octave (*do*), quinte (*sol*), quarte (*fa*), sixte majeure (*la*), tierce majeure (*mi*), tierce mineure (*mib*) et sixte mineure (*lab*). Dès qu'on s'éloigne tant soit peu de ces intervalles, la dissonance croît très vite,

[13] Il conviendrait aussi de prendre en compte les dissonances des harmoniques d'un même son entre eux; mais pour les premiers ordres ces harmoniques sont trop distants en fréquences les uns des autres pour produire une énergie de battement appréciable, et pour les ordres supérieurs c'est l'énergie même de ces harmoniques qui devient négligeable : ainsi cette contribution à la dissonance globale peut-elle être négligée.

d'autant plus vite que la consonance non troublée était meilleure. Aussi comprend-on cette conclusion de l'auteur :

> «Bien que la rigueur de cette théorie laisse encore beaucoup à désirer, elle nous suffit pour faire voir que notre hypothèse peut en réalité expliquer la répartition des dissonances et des consonances, telle que la fournit la nature » (p. 528).

Bien que fort intéressantes et souvent très pertinentes, nous ne dirons rien de plus sur les très nombreuses conséquences, touchant la musique, les instruments, l'histoire de la musique, que Helmholtz dégage de ce résultat. Précisons seulement que, s'il est vrai qu'on a reproché à notre physicien de réduire toute la musique aux consonances et dissonances, c'est là, selon nous, une critique qui ne l'atteint guère. Certes, à l'époque où triomphait le système musical de l'harmonie tonale, Helmholtz pouvait difficilement imaginer ce que serait un autre système. Mais il souligne plusieurs fois dans son ouvrage qu'au-delà de la part *naturelle* que représentent en musique les faits physiologiques de la consonance et de la dissonance, s'étend tout ce qui relève proprement de l'art et comporte une grande mesure d'arbitraire. Helmholtz, d'après sa théorie *et selon son goût personnel*, a en effet insisté sur l'exigence de la *justesse* des notes, il a critiqué le *tempérament égal*, cherché le moyen de fabriquer des orgues permettant de jouer juste dans tous les tons; mais il n'a pas dit que toute la musique se réduisait à la consonance.

Quoi qu'il en soit, nous laisserons maintenant cette question de côté afin d'examiner plus en détail les calculs de Helmholtz. En effet, notre compte rendu n'a été jusqu'ici qu'un résumé simplificateur qui, par tout ce qu'il nous a caché, nous empêche d'estimer correctement la nature du travail de l'auteur. On peut grouper les erreurs de ce travail sous deux principaux titres : 1) diverses négligences que Helmholtz aurait pu éviter avec l'attention requise; 2) plusieurs fautes liées au développement insuffisant de la science acoustique au moment où écrit Helmholtz. L'ensemble de ces fautes est quelque chose de complexe dont nous ne pouvons ici qu'exposer les grandes lignes.

### *1. Négligences commises par Helmholtz*

Une fibre de masse *m* étant mise en vibration par un son simple, Helmholtz calcule son énergie maximale et trouve :

$$1/2\, m\mathrm{V}^2 = 1/2\, m(\mathrm{F}/k)^2 \qquad (11)$$

qui est la juste valeur, d'après (3) avec $\omega = \omega_0$ [14].

Cependant, lorsqu'il étudie le phénomène des battements, pour exprimer les vitesses maximales que nous avons notées $\mathrm{V}_1$ et $\mathrm{V}_2$ (formule (4) ), il les prend purement et simplement constantes, alors que, d'après (11), il devrait écrire $\mathrm{V}_1 = \mathrm{F}_1/k'$ et $\mathrm{V}_2 = \mathrm{F}_2/k'$, c'est-à-dire qu'il devrait diviser la force par la «constante» d'amortissement $k'$, *qui est une fonction de*

---

[14] p. 516-517 de l'édition citée. Helmholtz nomme respectivement $a^2$, $b^2$, A, *n* ce que nous exprimons ici par *k*, *k*', F, ω.

*la pulsation propre de la fibre*. En outre, pour obtenir l'intensité, *i.e.* l'énergie des battements, *il néglige aussi la masse de la fibre* en écrivant $2V_1V_2$ au lieu de $2mV_1V_2$. Dans la suite, il prend, consciemment cette fois, le coefficient d'amortissement réduit $\alpha = k'/m\omega_0$ égal à une constante[15]. Ces deux négligences et cette hypothèse, nullement étayée, conduisent déjà à une absurdité (car $m$ étant sous-entendue constante, d'après $k' = \alpha m\omega_0$, il faudrait que $k'$ soit proportionnel à $\omega_0$, alors que la première négligence sous-entend ce paramètre constant). Mais de plus, dans les sons complexes, ce ne sont pas les forces $F_n$ qui doivent être prises comme références des harmoniques; ce sont leurs *pressions acoustiques* $p_n$ . Or, en toute généralité, on doit penser que ces pressions occasionnent sur la fibre une force excitatrice de la forme :

$$F_n = p_n \,.\, c(m)$$

où $c(m)$ est un coefficient, fonction de la fibre, et plus précisément de sa masse.

En résumé, les calculs de Helmholtz négligent totalement l'influence des variations des caractéristiques mécaniques des fibres de la membrane basilaire, caractéristiques difficilement accessibles à son époque. Une certaine contradiction en résulte.

*2. Erreurs liées au développement insuffisant de la science acoustique à l'époque de Helmholtz*

A cela vient encore s'ajouter le fait, bien connu aujourd'hui, que l'énergie d'un son (comme celle de la vibration des fibres de l'oreille) n'est pas proportionnelle à l'intensité perçue subjectivement. Du reste, l'expérience nous enseigne encore que les intensités subjectives ne s'ajoutent pas simplement comme le font les énergies. Pour additionner des puissances sonores subjectives, il convient de convertir les énergies en *phones* (pour prendre en compte les variations avec la fréquence) puis en *sonies*; et l'on sait que si les fréquences sont suffisamment différentes les unes des autres (d'une tierce mineure au moins) les sonies s'ajoutent alors arithmétiquement, tandis que dans le cas contraire il faut additionner les énergies[16].

De toute manière, c'est d'ailleurs ici d'énergie de battements et non d'énergie de sons simples ou complexes qu'il s'agit. Rien ne garantirait donc l'extension des méthodes de calcul valables pour l'addition des sons, à celle des battements.

En fin de compte, il se dégage deux attitudes possibles :

- soit tenter d'amender les calculs de Helmholtz, en essayant de remplacer le maximum des battements par leur intégrale sur toute la membrane basilaire et en remédiant à ses négligences (ce qui exige de choisir des lois de variation vraisemblables pour les

[15] Helmholtz note respectivement $B_1$, $B_2$, $\beta/\pi$ nos $V_1$, $V_2$, $\alpha$.

[16] Cf. par ex. *Le son musical*, *op. cit.*, *in* note 7, p. 113.

paramètres anatomiques $m$, $\alpha$, $c(m)$ ). En tout cas, un «replâtrage» complet, qui tiendrait compte des connaissances récentes de l'acoustique, semble impossible;

- soit développer une théorie beaucoup plus empirique, qui se contenterait de sommer les dissonances entre harmoniques, dissonances obtenues par la pure expérience. Par sa pauvreté théorique même, cette deuxième démarche serait nettement moins attrayante, quand bien même elle fournirait de bons résultats.

Nous allons à présent montrer très brièvement à quoi mènent ces deux façons de procéder.

## ESSAI D'AMÉLIORATION DE LA THÉORIE DE HELMHOLTZ

1) L'anatomie permet de déterminer approximativement la loi de variation de la masse $m$ de la fibre de la membrane basilaire avec sa pulsation propre $\omega_0$. En effet, sur toute la gamme de l'audition humaine, $\omega_0$ varie à peu près dans le rapport 400 (fréquence de 40 à 16000 Hz), cependant que la longueur des fibres change dans le rapport 1/20 [17]. En supposant que leur section varie dans la même proportion, cela donne la variation de masse 1/400. D'où, au moins approximativement :

$m$ proportionnel à $1/\omega_0$.

2) Dans l'équation dynamique (1), il est vraisemblable que le coefficient $k'$ de $dx/dt$ varie à peu près comme la surface de la fibre, donc comme $m^{2/3}$. Etant donné qu'une variation plus rapide produirait des changements de la qualité d'audition dans le passage des graves aux aigus, changements qu'on ne constate pas expérimentalement, on peut prendre plutôt une variation de $k'$ en $\sqrt{m}$ . D'où pour le coefficient d'amortissement réduit $\alpha = k'/m\omega_0$ :

$\alpha$ proportionnel à $\sqrt{m}$ [18].

3) Quand au paramètre $c(m)$, une fois multiplié par la pression acoustique $p$, il donne la force excitatrice de l'équation (1). Au point de vue dimensionnel, $c(m)$ doit donc être une surface. La vraisemblance veut donc que $c(m)$ soit proportionnel à $m^{2/3}$. Comme il ne s'agit ici que de faire un calcul approximatif (néanmoins théoriquement bien moins fautif que celui de Helmholtz), l'hypothèse plus simple :

$c(m)$ proportionnel à $\sqrt{m}$

nous suffira.

[17] Ceci était déjà accessible à Helmholtz (cf. éd. citée, p. 561).

[18] Il faut encore fixer le facteur de proportionnalité lui-même. Pour cela les arguments de Helmholtz peuvent être repris (par ex., si l'amortissement était insuffisant, on entendrait encore des sons, alors même qu'ils n'auraient plus lieu); on trouve ainsi $\alpha^2 \approx 3{,}14/\omega_0$.

En reportant ces trois fonctions dans (5), on parvient alors à l'expression suivante de l'intensité de battements[19]:

Ib proportionnelle à

$$\frac{p_1 p_2 \omega_1 \omega_2}{m\sqrt{[3{,}14\ \omega_0\ \omega_1^2 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2]\,[3{,}14\ \omega_0\ \omega_2^2 + (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2]}} \tag{12}$$

Le fait d'avoir choisi $c(m)$ proportionnel à $\sqrt{m}$ entraîne la disparition de $m$ dans l'expression et rapproche ce résultat de celui de Helmholtz. Cependant, les négligences que nous avons indiquées ci-dessus l'en éloignent, car il est possible de montrer que la valeur trouvée par Helmholtz (p. 527) s'écrit avec nos notations :

$$V_1\,V_2\,\frac{\alpha^2\ \omega_0^2\,\omega_1\,\omega_2}{m\sqrt{[\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega_1^2 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2]\,[\alpha^2\ \omega_0^2\ \omega_2^2 + (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2]}} \tag{13}$$

Comparée à (12) et à (5) cette expression présente la différence importante du facteur $\omega_0^2$ au numérateur.

Reprenant les calculs de la dissonance de deux sons complexes, avec la même fonction de dureté propre que celle de Helmholtz, mais avec l'expression corrigée (12), on obtient une courbe de dissonance... bien moins «bonne» que celle de Helmholtz (voir graphique ci-dessous).

Dans cette courbe, d'une part, *les consonances sont moins nettes* (vallées moins profondes). On peut montrer que cela est dû, non spécifiquement à l'emploi de la fonction corrigée (12), mais seulement au fait qu'au lieu d' «approximer» le maximum à $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, nous l'avons pris à $\omega_0 = \omega_1$ [20]. D'autre part *les dissonances*, à part celle qui avoisine l'unisson, sont également beaucoup moins marquées (pics moins élevés). Cette fois, la perte du facteur $\omega_0^2$ en est bien la cause. Car ce facteur favorise les dissonances des hautes fréquences, donc des harmoniques d'ordre élevé[21].

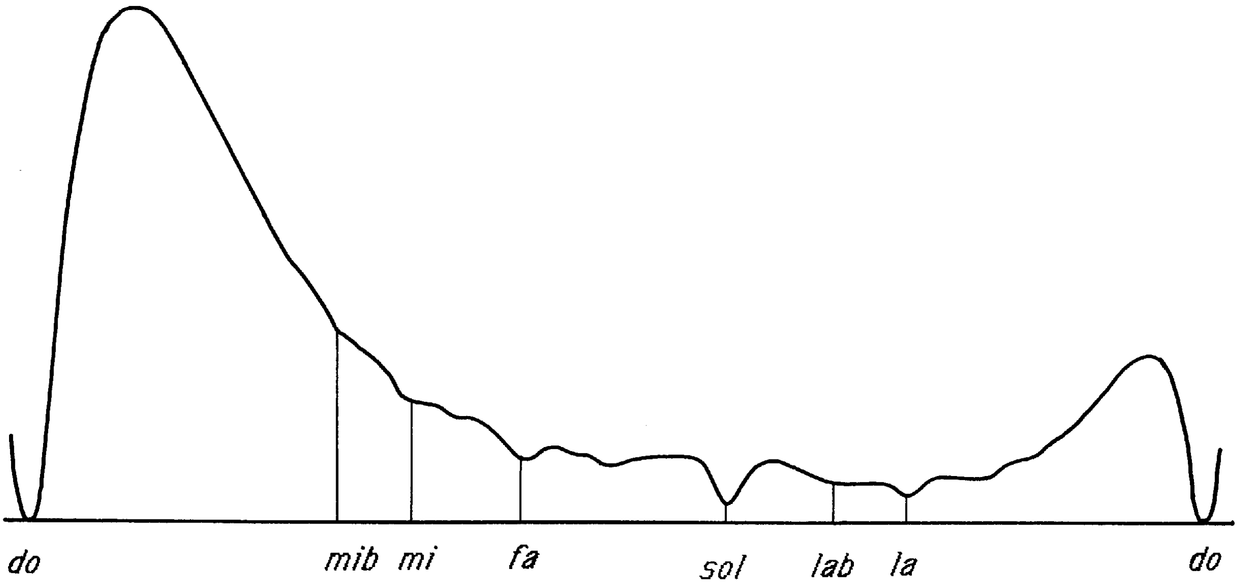
---

[19] Deux autres corrections pourraient encore être envisagées. La première rendrait compte de ce que, avec la variation de la fréquence, l'intensité subjective d'un son n'est pas proportionnelle à son énergie. Mais plusieurs raisons s'opposent à cette correction. D'une part, si ceci est vrai des sons, ceci ne l'est pas forcément des battements; d'autre part, la loi de variation de l'intensité subjective avec la fréquence est complexe et dépend du niveau sonore.

La seconde concernerait la composition de plusieurs battements, comme dans le cas de la dissonance de deux sons complexes. On sait en effet que les intensités de deux sons simples ne se composent pas selon une pure addition. Il convient d'abord d'exprimer les intensités en *sonies*, puis d'ajouter ces sonies, du moins si les sons sont suffisamment distants en fréquence. Mais là aussi, rien ne prouve que ceci, qui s'applique aux sons, soit encore valable pour les battements. En définitive, un argument plus décisif encore nous dissuade de procéder à ces corrections. Car, alors que jusqu'à présent nous ne pratiquions que de la physiologie physique (l'oreille étudiée comme un appareil de physique), de telles corrections introduisent des évaluations psychologiques totalement étrangères au principe de la démarche helmholtzienne.

[20] Les expressions (12) et (13) ont, non pas un maximum, mais deux maxima, très voisins de $\omega_1$ et de $\omega_2$. Pour un intervalle de quinte, les vrais maxima sont plus de quatre fois supérieurs à la valeur calculée par Helmholtz (alors qu'ils lui sont égaux pour l'unisson).

[21] En réalité, chez Helmholtz (13), le coefficient $\alpha^2$ est constant, tandis qu'il varie dans (12) où il a été pris égal à $3{,}14/\omega_0$. Ceci diminue un peu l'influence du facteur $\omega_0^2$, qui reste néanmoins décisive, comme le montrent les calculs.




On peut enfin chercher à évaluer la correction qu'apporterait le remplacement d'une fonction prise en son maximum par l'intégrale de cette fonction sur toutes les fibres de l'oreille interne. Opérée à partir de la fonction de Helmholtz (13), ou à partir de la nôtre (12), cette évaluation conduit à la même conclusion : là encore une atténuation des vallées et des pics des courbes[22]. La courbe de dissonance devient particulièrement médiocre, invraisemblablement «édulcorée», dans le cas qui théoriquement devrait être le meilleur : fonction de Helmholtz corrigée (12) et intégrée.

Ceci est tout à fait remarquable, car c'est la preuve que jusque dans ses erreurs mêmes Helmholtz a montré une intuition très sure; il savait quel résultat il voulait obtenir. Ayant fait une fallacieuse approximation (maximum de la fonction des battements), il a choisi une loi de dureté propre qui corrigeait cette erreur[23]. Il a en outre surestimé l'importance des

[22] L'intégrale de (13) est facile à calculer; à la quinte, par rapport à l'unisson, l'énergie se trouve réduite à 25 % au lieu de 1 % comme dans le cas de la fonction maximum choisie par Helmholtz.

L'intégrale de (12), du fait de la non-homogénéité du radical selon les pulsations $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, doit, elle, être recalculée pour chaque valeur de la pulsation moyenne $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ et de l'écart $\delta = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_1 + \omega_2)$. Il faut tabuler les valeurs de cette intégrale et l'estimer directement par des fonctions afin de limiter à un temps raisonnable la durée des calculs sur ordinateur. L'ampleur des calculs peut aussi être une raison du recul de Helmholtz devant l'intégrale. On reste déjà surpris face aux nombreux calculs qu'il a dû effectuer lui-même (bien entendu «à la main») ou plus probablement faire faire.

[23] Si la hauteur des pics et la profondeur des vallées de la courbe de dissonance dépend principalement — ainsi que nous l'avons vu — de la fonction d'énergie des battements, leur finesse (à quoi correspond la sélectivité des intervalles musicaux) se trouve considérablement renforcée — ainsi que nous allons le voir — par le choix pratiqué par Helmholtz pour la fonction de dureté propre.

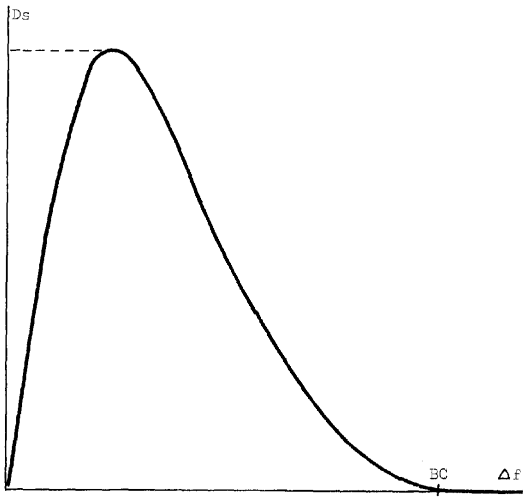
A partir de notre fonction (12) il serait évidemment possible de se donner une fonction de dureté propre qui, en multiplication, produirait, au moins dans le cas de deux sons simples, une loi de dissonance conforme à la réalité expérimentale. Le résultat serait une assez bonne courbe de dissonance pour deux sons complexes. Mais cette solution «mixte» doit être repoussée comme nous l'avons expliqué ci-dessus.

harmoniques, sans doute parce que l'éducation musicale de son oreille amplifiait sa perception dans ce domaine.

## ESSAI D'UNE THÉORIE EMPIRIQUE

Constatant le quasi-échec de l'essai d'amélioration de la théorie de Helmholtz, on peut tenter d'aborder la question par une autre voie, beaucoup plus empirique. L'hypothèse du fonctionnement mécanique de l'oreille devient superflue, à ceci près que l'on se contente encore d'admettre la *composition des dissonances entre sons simples*. Mais d'où proviennent ces dissonances élémentaires? Aucune réponse n'est apportée à cette question dans la théorie empirique, qui se limite à constater et à évaluer les dissonances par l'expérience.

On sait en effet que si deux sons simples sont émis simultanément, la dissonance qu'ils produisent évolue comme suit selon leur différence de fréquences (graphique page suivante).




L'ensemble des abscisses de la courbe se modifie selon la fréquence moyenne des deux sons, la courbe gardant cependant toujours les mêmes proportions. La différence des fréquences BC à partir de laquelle la dissonance est quasi nulle s'appelle la *bande critique* : c'est une fonction croissante de la fréquence moyenne des sons, qu'on peut déterminer expérimentalement. Appelons la dissonance qui en résulte, la fonction :

$$Ds(\omega_1, \omega_2)$$

Dans le cas de deux sons complexes, comment faut-il composer les dissonances des couples des sons simples harmoniques qui les constituent? C'est une chose qu'on ignore, mais on peut supposer que s'applique la simple addition, au moins s'il s'agit de couples de sons dont les fréquences moyennes sont assez distantes les unes des autres (pour les intensités sonores mesurées en unités psychologiques, les *sonies*, l'addition est ainsi autorisée lorsque les sons s'écartent d'au moins une bande critique). Enfin, d'une manière également fort arbitraire, pour tenir compte des intensités des sons, on pourra prendre chaque dissonance élémentaire proportionnelle au produit des pressions acoustiques des deux harmoniques qui la produisent.

Soit donc deux sons complexes représentés par les pressions acoustiques $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, . . . et $p'(1)$, $p'(2)$, $p'(3)$, …[24]. La dissonance globale, dans cette théorie, sera évaluée par la somme :

$$\sum_{n,n'} p(n)\, p'(n')\, \mathrm{Ds}(n\omega, n'\omega') \qquad (15)$$

Comparée à la formule helmholtzienne (10), on peut dire que celle-ci *ne réalise pas l'analyse de la dissonance elle-même* (en énergie de battement et dureté propre), mais la prend comme une entité indécomposable. Le résultat est une courbe de dissonance meilleure que les précédentes, mais cependant inférieure à celle de Helmholtz. Cette infériorité s'explique facilement par le fait que dans (15) la bande critique devient presque *proportionnelle à la fréquence moyenne* lorsque celle-ci dépasse 500 Hz[25], alors que, pour Helmholtz qui estime la dureté maximale lorsque $\Delta f = 30$ Hz quelle que soit la fréquence moyenne, la bande critique reste *constante*. A partir de la, il est aisé de montrer que l'hypothèse de Helmholtz rend beaucoup plus sélectives, c'est-à-dire étroites en fréquence, les dissonances des harmoniques de deux sons complexes, que l'hypothèse empirique (et cela d'autant plus que les harmoniques sont d'ordre élevé)[26].

Cette dernière ébauche de théorie, comme les précédents essais d'amélioration, montre assez la haute valeur de l'analyse physiologique de Helmholtz. Elle est telle qu'aucun progrès relevant de la théorie elle-même n'a vraiment été réalisé. Certes, la physiologie «psychologique» a beaucoup avancé depuis qu'a été écrite la *Lehre der Tonempfindungen*; mais on peut dire que l'immense complexité de la transmission et du traitement nerveux central de l'information issue de l'oreille interne a formé une sorte de barrière sur laquelle les chercheurs sont venus buter. Dans son interprétation physique, qui allait contre toute la physiologie animiste et vitaliste de l'époque juste précédente, Helmholtz est parvenu, très vite, presque aussi loin qu'il était possible d'aller.

---

24 L'*intensité physique* d'un son est mesurée par le carré de sa pression acoustique.

25 Empiriquement, la *bande critique* peut s'écrire :

$$\mathrm{B}c = 240\sqrt{1 + (f/1187)^2} - 150 \quad \text{où } f \text{ est la fréquence.}$$

La dissonance s'exprime alors assez bien par la fonction :

$$\mathrm{Ds} = 118{,}2\, x^2\, e^{-8x} \qquad \text{o ù} \quad x = \Delta f/\mathrm{B}c.$$

Comme B$c$ et $\Delta f$ dépendent uniquement de $f_1$ et $f_2$ (ou de $\omega_1$, $\omega_2$), ceci permet de calculer la fonction (15).

26 Soit deux sons complexes de fréquence $f_1$ = cte, $f_2$ variable, et $nf_1$, $n'f_2$ les fréquences de deux quelconques de leurs harmoniques. Dans l'hypothèse empirique, la bande critique des harmoniques est proportionnelle à $nf_1 + n'f_2$, expression qui croît avec $n$ et $n'$ . Par ex., la dissonance de la quarte se produisant pour $f_2 \approx 4/3\, f_1$, $n = 4$, $n' = 3$, la bande critique autour de la quarte est environ quatre fois plus grande que celle située autour de l'unisson (où $f_2 = f_1$, $n' = n = 1$). Mais c'est seulement $f_2$ qui varie, produisant la variation de fréquence de l'harmonique $n' = 3{:}3\,\Delta f_2$.

Ainsi, il faut une variation de fréquence de $f_2$ égale à 4/3 de celle qui est nécessaire à l'unisson pour parcourir la bande critique.

Dans la théorie de Helmholtz, en revanche, la bande critique restant constante, il suffit d'une variation de fréquence de $f_2$ égale à 1/3. C'est cela qui explique le caractère extrêmement resserré des pics du diagramme de Helmholtz.

## EN GUISE DE CONCLUSION : COUP D'ŒIL SUR LE PASSÉ

Enfin, si au lieu de se tourner vers l'avenir de notre auteur, nous cherchons à le situer par rapport à son passé, alors sa réussite apparaîtra en pleine lumière. Passons sur la théorie d'Euler (1739)[27] dans laquelle tout reposait sur l'idée «métaphysique» de la perfection de l'ordre et sur une formule arbitraire d'évaluation du degré d'harmonie des sons - théorie sans aucun rapport à l'expérience. Pensons plutôt au *Nouveau système de musique* de Rameau (1726), brillamment repris par d'Alembert (1762)[28]. Selon les termes mêmes des auteurs, deux «expériences» sont à la base du système : la première consiste en ce que dans tout son musical on entend la douzième et la dix-septième (*i.e.* l'octave de la quinte et la double octave de la tierce majeure — ce sont les harmoniques que Rameau lui-même entendait avec netteté). La seconde expérience se réduisait, quant à elle, à la ressemblance d'un son avec son octave[29].

Il est inutile que nous insistions sur tous les enchaînements de règles musicales qu'un d'Alembert était capable, par son génie de mathématicien, de présenter dans le meilleur ordre. De toute manière, l'auteur avait parfaitement conscience des limites de son ouvrage. Il faut même dire que, par un préjugé contre la physique — bien pardonnable à l'époque — il s'en exagérait les défauts :

> «Dans les matières de Physique, où il n'est guère permis d'employer que des raisonnements d'analogie & de convenance, il est naturel que l'analogie soit tantôt plus, tantôt moins sensible : & ce serait, nous osons le dire, le caractère d'un esprit bien peu philosophique, de ne savoir pas reconnaître & distinguer cette gradation & ses différentes nuances. Il n'est même pas surprenant , que dans un sujet où l'analogie seule peut avoir lieu, ce guide vienne à manquer tout-à-coup pour l'explication de certains phénomènes» (p. xiv-xv ).

Car, comme l'a relevé Helmholtz lui-même, Rameau et d'Alembert péchaient comme Euler par excès de métaphysique et par manque de physique. Affirmer en effet que l'accord parfait majeur est consonant parce qu'il est *naturel*, c'est se référer à une esthétique qui reste problématique (ainsi que le disait déjà Aristote, l'art doit imiter, mais aussi *corriger* la nature; tout

---

[27] Euler, *Tentamen novae theoriae musicae* (Petropoli, 1739). Considérant les nombres entiers des fractions irréductibles exprimant les intervalles musicaux, Euler définit le degré d'harmonie comme ce nombre s'il est unique et premier; la somme des degrés, moins 1, des facteurs premiers de ce nombre s'il est unique mais non premier; le degré du *ppcm* de ces nombres, s'il y en a plusieurs. Par ex. le degré de la quinte est $d(2,3) = d(2) + d(3) - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$. Le classement qui en découle pour les consonances est assez bon. Cependant, cette théorie n'explique pas du tout, entre autres choses, pourquoi une consonance légèrement altérée sonne presque aussi bien que la consonance juste, alors que le rapport numérique peut devenir extrêmement complexe (voire transcendant!) et conduire à un degré d'harmonie épouvantable.

[28] *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau* (1re éd. 1762, 2e éd. 1779; récemment réédité, en fac-similé, Plan-de-la-Tour (Var), aux Editions d'Aujourd'hui, 1984).

[29] La seconde expérience permettait de transposer librement un son à n'importe quelle octave, notamment les harmoniques de la première expérience : d'où le fondement «naturel» de l'accord parfait majeur.

ce qui est naturel n'est pas bel et bon). Et, en tout cas, les deux expériences fondamentales invoquées restent ici complètement inexpliquées. A cet égard, cent ans après d'Alembert, la supériorité de Helmholtz, en la matière, est évidente.