

LA MUSIQUE TRADUITE EN MATHÉMATIQUES : LEONHARD EULER*

Patrice BAILHACHE

Au milieu du XVIII^e siècle, au moment où la musique dite classique acquiert ses lettres de noblesse avec Bach (1685-1750), Haendel (1685-1759), Rameau (1683-1764), Haydn (1732-1809), Mozart (1756-1791), etc., deux mathématiciens particulièrement illustres, Euler et d'Alembert, produisent des théories de la musique. Le fait n'est évidemment pas le résultat d'un «hasard historique». Il représente au contraire la prolongation d'une tradition¹. Du reste, au siècle précédent, plusieurs savants avaient déjà pris la fantaisie de porter leur attention sur le même sujet : Descartes (*Compendium musicae*), Galilée (fin de la 1^{re} journée des *Discorsi*), Mersenne (l'énorme ouvrage de *l'Harmonie universelle*), Leibniz «en amateur»². Mais au XVIII^e siècle, c'est la musique elle-même qui change, l'harmonie classique détrônant définitivement le contrepoint médiéval. Il fallait donc expliquer ce changement, en faire la théorie, et la tâche pouvait inspirer, à juste titre, tout savant féru de musique.

Euler (1707-1783) a 24 ans lorsqu'il écrit, en 1731, son *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (*Essai d'une nouvelle théorie de la musique, exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie les mieux fondés*). C'est une œuvre de 263 pages, écrite en latin, qui ne sera publiée qu'en 1739. Elle a été traduite en français un siècle plus tard avec l'édition de Bruxelles des œuvres du mathématicien. Je dirai quelques mots tout à l'heure sur la qualité de cette traduction.

En 1739 Euler est déjà connu comme mathématicien et se trouve à St Pétersbourg, où il occupera bientôt la chaire de mathématiques. Il est fort intéressé par tout ce qui touche à la musique. Il a publié à Bâle, en 1727, une «thèse sur le son» où il compare les sons produits par les cordes vibrantes avec ceux engendrés par les instruments à vent. Et

¹ Au Moyen Age le *quadrivium* désignait les quatre «arts» mathématiques : l'arithmétique, la musique, la géométrie et l'astronomie. Ce quadrivium constituait la partie supérieure du savoir, par opposition au *trivium*, la partie élémentaire, qui, elle, comprenait la grammaire, la rhétorique et la dialectique.

² Cf. notre ouvrage *Leibniz et la théorie de la musique*, Klincksieck, coll. "Domaine musicologique", 1992, 158 p.

* *Communication au colloque du Centre François Viète, "Problèmes de traduction au XVIIIe siècle", Nantes, 17 janvier 1997.*

vers 1726 déjà, Euler avait projeté le plan d'une œuvre considérable sur la musique. A part le fait que les sons devaient y être notés par des numéros d'ordre dans la gamme, l'objet d'étude restait proche des réalités musicales. La dernière section, par exemple, devait analyser les différentes sortes de morceaux de musique (sarabande, courante, etc.). Mais le départ du mathématicien pour St Pétersbourg (1727) et ses autres travaux l'empêchèrent de poursuivre dans cette voie initiale. C'est finalement une œuvre beaucoup plus mûrie qui vit le jour en 1739³.

Au reste, Euler resta toute sa vie intéressé par les questions de musique. Il apporta des précisions à sa nouvelle théorie par quelques articles⁴, montrant, comme nous le verrons, qu'il savait tenir compte des critiques qu'on avait adressées à ses conceptions⁵. Plus, je crois même — et je tâcherai de le montrer — qu'il abandonna l'une des hypothèses fondamentales de sa théorie, sans l'avouer expressément.

Passant sur le premier chapitre (sur le son et l'ouïe), j'en viens tout de suite aux fondements de la théorie musicale d'Euler (exposés dans le deuxième chapitre «De suavitate et principiis harmoniae»). Comment expliquer que certains sons paraissent agréables et d'autres non? Il semble paradoxal de trouver une règle, puisque les mêmes choses ne plaisent pas à tout le monde, ou que le goût d'une même personne peut évoluer. Peut-on enfermer un art, comme la musique, dans des lois? Euler répond que, comme pour tous les beaux-arts, il faut se fier à l'opinion des personnes éclairées, donc en musique à celles dont l'oreille a été exercée et qui pourront apercevoir les justes lois que dicte la nature :

«Sed Musicum similem se genere oportet Architecto, qui plurimorum perversa de aedificiis iudicia non curans secundum certas et in natura ipsa fundatas leges aedes exstruit; quae etiamsi harum rerum ignaris non placeant, tamen, dum intelligentibus probentur, contentus est.» [OO, 3a, I, 224]

Cette remarque préalable étant faite, Euler affirme que tout plaisir provient de la *perception de la perfection*, tout être normalement constitué recherchant celle-ci :

«Certum est enim perceptionem perfectionis voluptatem parere hocque omnium spirituum esse proprium, ut perfectionibus detegendis et intuendis delectentur, ea vero omnia, in quibus vel perfectionem deficere vel imperfectionem adesse intelligunt, aversentur.» [OO, 3a, I, 225]

³ [OO, 3a, I, x-xiv]. Cette référence, comme les suivantes d'Euler, renvoie aux *Opera Omnia*, series tertia, volumen primum, «Opera physica, miscellanea, epistolae; Lipsiae et Berolini, 1926.

⁴ la plupart en français.

⁵ Je laisserai de côté les pages consacrées à la théorie de la musique dans les *Lettres à une princesse d'Allemagne* (à peine seize pages sur près de six cents). Elles contiennent seulement une sorte d'extrait ultra-simplifié du *Tentamen*.

Cependant, comme nous le montre l'exemple d'une horloge, la perfection se réduit à l'ordre.

«Contemplemur exempli causa horologium, cuius finis est temporis partes et divisiones ostendere: id maxime nobis placebit, si ex eius structura intelligimus omnes eius partes ita esse confectas et inter se conjunctas, ut omnes ad tempus exacte indicandum concurrant.»

«Ex hisce sequitur, in qua re insit perfectio, in eadem ordinem necessario inesse debere.» [OO, 3a, I, 225]

«Vicissim igitur etiam intelligitur, ubi sit ordo, ibi etiam esse perfectionem et legem regulamve ordinis respondere scopo perfectionem efficienti.» [OO, 3a, I, 226]

Cette notion de l'ordre est la clé de la théorie. Toutefois, il reste encore à l'adapter au domaine de la musique. Or l'ordre des choses peut être perçu de deux façons : ou bien l'on connaît déjà les règles et l'on en reconnaît la présence immédiatement; ou bien les règles sont inconnues, et l'on doit alors les rechercher, les dévoiler (*detego*); la musique est conforme à ce second processus :

«Duobus autem modis ordinem percipere possumus; altero, quo lex vel regula nobis iam est cognita, et ad eam rem propositam examinamus; altero, quo legem ante nescimus atque ex ipsa partium rei dispositione inquirimus, quaenam ea sit lex, quae istam structuram produxerit. Exemplum horologii supra allatum ad modum priorem pertinet; iam enim est cognitus scopus seu lex partium dispositionis, quae est temporis indicatio; ideoque horologium examinantes dispicere debemus, an structura talis sit, qualem scopus requirit. Sed si numerorum seriem aliquam ut hanc 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 etc. ascipio nescius, quae eorum progressionis sit lex, tum paulatim eos numeros inter se conferens deprehendo quemlibet esse duorum antecedentium summam hancque esse legem oerum ordinis affirmo.»

«Posterior modus percipiendi ordinis ad musicam praecipue spectat» [OO, 3a, I, 226]

Reste à déterminer en quoi consiste l'ordre des sons. Il est essentiellement de deux types : selon ce qu'on appelle aujourd'hui la *hauteur* (grave ou aigu) ou selon la *durée*. On pourrait aussi parler d'ordre selon l'intensité, mais cet ordre est peu quantifiable et assez aléatoire, puisqu'un compositeur ne peut indiquer que de façon imprécise l'intensité des sons.

Et finalement, reconnaissant la prééminence de l'ordre de la hauteur sur celui de la durée, puisque celle-là se mesure par les fréquences de vibration, Euler ramène l'évaluation du plaisir musical à la mesure arithmétique des proportions attachées aux sons.

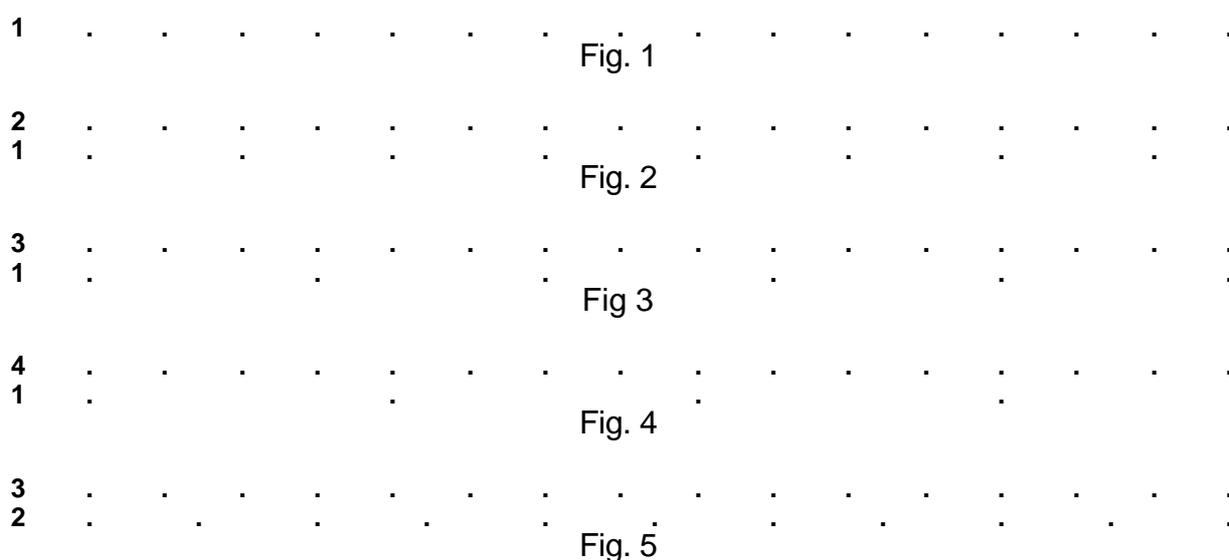
Cette «métaphysique» de la musique n'est pas totalement nouvelle. Le «résultat» de la métaphysique eulérienne se trouvait déjà dans l'Antiquité chez les Grecs, qui avaient fondé la science musicale sur la théorie des proportions (cf. la *Division du canon* de l'école euclidienne). De même, l'idée que la musique consiste en la

perception indirecte (ou plus précisément inconsciente) des rapports des fréquences sonores est énoncée par Leibniz :

«musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi.»⁶

Mais, en dépit de ces identités thématiques, il convient de souligner les différences qui font l'originalité d'Euler. D'abord, ainsi qu'on va pouvoir bientôt en juger, la théorie de notre mathématicien dépasse de très loin la simple considération des rapports des fréquences de deux sons. Ensuite, contrairement à ses prédécesseurs qui, eux aussi, fondaient leur théorie sur les proportions presque sans aucune explication, Euler ébauche une argumentation philosophique, dans laquelle des proportions on parvient au plaisir musical, via l'ordre et la perfection. Quant à la source leibnizienne, on peut sans doute en reconnaître l'influence dans la distinction que fait Euler entre les deux modes de perception de l'ordre. Mais on notera que, contrairement au maître de Hannover, il ne s'aventure pas à parler de perception inconsciente; peut-être n'en admet-il pas la notion, ou bien, tout simplement, préfère-t-il appliquer son génie à développer des calculs mathématiques plutôt que des considérations philosophiques.

Cela dit, examinons comment Euler évalue l'ordre des sons selon leur hauteur. Par l'intermédiaire des vibrations de l'air, les instruments de musique produisent des *coups* ou chocs [ictus] réguliers sur notre tympan. Par souci de clarté, Euler visualise ces coups, dans le cas des accords les plus simples *de deux sons*, par les figures suivantes :



⁶ «La musique est une pratique occulte de l'arithmétique dans laquelle l'esprit ignore qu'il compte.» (lettre à Chr. Goldbach du 17/4/1712). Cf. notre livre, déjà cité, *Leibniz et la théorie de la musique*, p. 151.

etc...[OO, 3a, I, 231]

C'est ici le lieu de dire quelques mots sur la traduction française de 1839, puisqu'aussi bien le thème principal de notre colloque est celui de la traduction scientifique. Je me contenterai d'un coup d'œil sur le deuxième chapitre, «De suavitate et principiis harmoniae», traduit par «Des charmes et des principes de l'harmonie». La *suavitas* sera discutée tout au long de l'ouvrage, car un des buts majeurs qu'Euler se propose d'atteindre est celui de définir une échelle de «bonté» des agrégats sonores, ce qu'il nomme «suavitatis gradus», des degrés d'agrément. Inutile de remarquer, dans ces conditions, que le terme de «charme» n'est pas très bien choisi. Euler écrit :

«Duobus sonis propositis percipiemus eorum relationem, si intelligamus rationem, quam pulsuum eodem tempore editorum numeri inter se habent; ut si alter eodem tempore 3 pulsus perficiat, dum alter 2, eorum relationem adeoque ordinem cognoscimus observantes hanc ipsam rationem sesquialteram. Similique modo plurium sonorum mutuam relationem comprehendimus, si omnes rationes, quas singulorum sonorum numeri vibrationum eodem tempore editarum inter se tenent, cognoscemus.» [OO, 3a, I, 228]

ce qui devient :

«Deux sons étant donnés, nous connaissons la relation qui existe entre eux, si nous pouvons saisir le rapport du nombre de vibrations effectuées pour l'un, au nombre de vibrations effectuées pour l'autre dans le même temps. Par exemple, s'il se faisait 3 vibrations pour le premier, pendant que pour le second il y en aurait 2, nous connaîtrions leur relation et par conséquent leur ordre, en observant le rapport des nombres 3 et 2 qui est 3 : 2. » [OCF, 5, 27]⁷

Nous voyons d'abord que «pulsus» est rendu par «nombre de vibrations», ce qui correspond visiblement à un désir de modernisation de la théorie. Littéralement «pulsus» est une *impulsion*, un choc, et la notion qu'Euler a en vue est bien celle des chocs (minuscules et rapides) que les corps sonores produisent sur le tympan de l'oreille par l'intermédiaire du milieu qui transmet le son. En fait, comme je l'explique plus loin, Euler reprend ce que l'on appelle à présent la théorie de *la coïncidence des coups*. Cependant, dans la phrase suivante, Euler lui-même parle de «numeri vibrationum», ce qui justifie dans une certaine mesure la démarche du traducteur.

Nous constatons ensuite que «rationem sesquialteram» est tout simplement traduit par «3:2». Il s'agit à nouveau d'une modernisation, car la proportion sesquialtère désigne chez Euclide (dont Euler s'inspire ici au moins pour la terminologie) tout rapport de la forme $1 + 1/n$, donc $3/2$ pour $n = 2$.

⁷ Comme ci-dessus pour [OO], nous désignons par [OCF] les références aux *Œuvres Complètes en Français de L. Euler*, Éditées par l'Association des capitaux intellectuels pour favoriser le développement des Sciences physiques et mathématiques, tome 5, qui contiennent l'*Essai sur la musique* et trois mémoires sur le même sujet.

Jetons un dernier regard sur le paragraphe suivant :

«Magnum quidem extat in sonorum rationibus percipiendis subsidium, quod singulorum plures ictus percipimus saepiusque eos inter se comparare possumus. Idcirco multo est facilius duorum sonorum rationem discernere audiendo quam duarum linearum eandem rationem habentium intuendo.» [OO, 3a, I, 228]

En français :

«L'appréciation des rapports entre les sons, est singulièrement facilitée par cette circonstance que nous percevons plusieurs vibrations de chacun, et qu'ainsi nous pouvons, pendant leur durée, les comparer plusieurs fois l'un à l'autre. Il est donc bien plus aisé de distinguer par l'ouïe le rapport de deux sons, que de reconnaître par la vue le même rapport entre deux lignes.» [OCF, 5, 27-28]

À nouveau la traduction modernise le terme d'«ictus» en «vibrations», qui pourtant désigne très exactement les «coups» dont je viens de parler.

Ce rapide examen pourrait laisser penser que la traduction française laisse beaucoup à désirer. Il est certain qu'elle mériterait d'être révisée pour devenir plus précise. Cependant, à en juger par ce que j'en connais, je crois qu'on doit tout de même dire que le traducteur a fait un travail intelligent et globalement fidèle.

Revenons maintenant à la théorie d'Euler. Le mathématicien raisonne de la manière suivante.

— Une note unique, ou deux notes à l'unisson, (fig. 1) donne l'ordre le plus simple. Il répond au rapport 1:1 et correspond au *premier degré de douceur* [primum suavitatis gradum].

— Le rapport 1:2, qui est celui de l'octave (fig. 2), donne l'ordre le plus simple après celui de l'unisson : c'est le deuxième degré de douceur.

— Les rapports 1:3 et 1:4 sont assez simples (fig. 3 et 4); le premier (celui de la quinte de l'octave supérieure) comporte des nombres plus petits, mais le deuxième est double de la proportion double (c'est la double octave) donc facile à percevoir. Ils sont regroupés dans le même degré de douceur : le troisième.

— Euler attache ensuite le degré $n+1$ au rapport $1:2^n$, chaque puissance de 2 incrémentant le degré d'une unité.

Remarquant alors, que 1:5 doit être plus complexe que 1:8 (=1:2³), lequel a le degré 4, Euler lui attribue le degré 5 et en déduit par induction que pour p premier 1: p est de degré p . Ensuite, cette fois pour p quelconque :

«[...] si ratio 1 : p ad gradum, cuius index sit m , referatur, rationem 1 : $2p$ ad gradum $m + 1$ pertinere, 1 : $4p$ ad gradum $m + 2$ et 1 : $2^n p$ ad gradum $m + n$. Multiplicato enim numero p per 2 ad rationis perceptionem requiritur praeter perceptionem rationis 1 : p bisectio aut duplicatio, qua ut simplicissima operatione gradus suavitatis unitate evehitur.»

Et Euler poursuit en calculant le degré qu'il faut attacher à $1:pq$, p et q étant de nouveau premiers :

«Simili modo determinare licet gradum suavitatis rationis $1 : pq$, si p et q fuerint numeri primi; nam ratio $1 : pq$ eo magis est composita quam $1 : p$, quo $1 : q$ magis est composita quam $1 : 1$. Ergo rationis $1 : pq$ gradus cum p , q et 1 debet proportionem arithmetica constitutere, unde erit igitur $p + q - 1$.» [OO, 3a, l, 232]

Finalement, en appliquant plusieurs fois cette règle, on peut généraliser, ce qui produit une formule qu'Euler n'écrit pas, mais qui revient à :

$$1:p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} \text{ a pour degré } \Sigma(k_i p_i - k_i) + 1$$

les nombres p_i étant premiers et les k_i étant des exposants positifs quelconques de ces nombres.

Les cas de plus de deux sons se ramènent facilement à cette formule. Ainsi, quatre sons dans les rapports $1:p:q:r$, avec p , q , r premiers, seront assimilés à $1:pqr^8$. Lorsque les nombres de vibrations ne sont pas premiers, la procédure est un peu plus compliquée. Considérons par exemple les sons correspondant à $1:pr:qr:ps$ (p , q , r , s étant premiers). p et r interviennent deux fois, mais étant confondus par l'oreille, ils ne doivent être pris qu'une fois; de sorte que l'ensemble sera assimilé à $1:pqrs$, qui est le *plus petit commun multiple* (PPCM) des facteurs proposés.

Restent les cas où l'un des nombres de vibrations n'est pas 1. La quinte 3:2 en est un exemple. On commencera alors par réduire éventuellement les nombres en les divisant par leur *plus grand commun diviseur* (PGCD) (ex : 4:6:8 donne 2:3:4), puis, comme tout à l'heure, on prendra leur PPCM. C'est ainsi que la quinte revient au PPCM 6 et est donc du quatrième degré.

Arrêtons-nous là dans cet exposé, ce qui vient d'être dit appelant plusieurs remarques.

L'idée de mesurer le degré de douceur d'un accord de deux sons par l'ordonnancement des *coups* qu'on imagine être le propre d'un son musical n'est pas nouvelle. Bien au contraire, elle se rattache directement à ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui la théorie de *la coïncidence des coups*, c'est-à-dire cette théorie qui représentait ce qu'on pourrait appeler, au sens de Kuhn, la théorie «normale» au temps de Galilée et Mersenne. Selon cette théorie, un accord est d'autant plus consonant que les coups «coïncidants» issus des deux sons sont en proportion plus élevée dans l'ensemble des coups produits. Mais, à la vérité, au XVII^e siècle, les calculs ne sont

⁸ Les nombres premiers issus de deux sons différents doivent être distincts. Sinon, $1:p:p$ sera assimilé à $1:p$ et non à $1:p^2$, car les deux sons p sont saisis par l'oreille comme un son unique.

jamais poussés bien loin et, qui plus est, une erreur fort étrange est systématiquement commise. Au lieu de prendre la proportion en question, on considère celle des coups coïncidants par rapport au nombre de coups *du son le plus aigu seulement*⁹.

Une seconde remarque concerne la démarche d'Euler. Elle est plutôt surprenante. Tout tient en fait dans le degré de douceur $p + q - 1$ attaché au rapport $1:pq$, où, ce qui revient au même, à deux sons p et q (ces nombres étant premiers entre eux). Nous avons vu qu'Euler parvient à ce résultat par une sorte de raisonnement analogique : le rapport $1:pq$ «dépasse»¹⁰ $1:p$ comme $1:q$ dépasse $1:1$. Il faut donc que son degré soit une proportion arithmétique de p , q et de 1 , ce qui produit logiquement $p + q - 1$. On ne peut pas dire que cette déduction jouisse d'une grande rigueur et emporte la conviction, d'autant que le résultat antérieur (le degré p de $1:p$) se trouve lui-même obtenu par une synthèse du même ordre de vraisemblance.

Or je dis que le résultat $p + q - 1$ était directement accessible, d'une façon beaucoup plus rigoureuse. Il suffisait pour cela de calculer *correctement* le degré de douceur de l'accord $p:q$ conformément à la théorie de la coïncidence des coups. Si p et q sont deux nombres premiers (ou même premiers entre eux) distincts, il est bien clair que durant une *période* aucun de leurs coups ne coïncideront, excepté ceux du début et de la fin de la période. Il n'y aura donc qu'un seul coup coïncidant par période (la fin d'une période étant le début de la période suivante). Et le nombre total des coups sera la somme de tous les coups, $p + q$, diminuée d'une unité puisque les deux coups coïncidants ne seront perçus que comme un seul. (sur l'exemple de la quinte, fig. 5 ci-dessus, on voit qu'il y a une coïncidence et quatre coups [y compris cette coïncidence])

⁹ Cf. par exemple notre étude «Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée», *Sciences et techniques en perspective*, 23, spécialement §3, p. 81 à 88. Cette erreur est commise par Galilée sans aucune ambiguïté : «Ainsi la première et la plus agréable consonance sera celle de l'octave, puisqu'à chaque percussion du tympan due à la corde la plus grave correspondent deux percussions provoquées par la corde la plus aiguë : à l'occasion d'une vibration sur deux de la corde la plus aiguë les effets viendront donc se conjuguer, en sorte que la moitié des percussions au total battront l'oreille ensemble; de leur côté deux cordes à l'unisson, vibrant toujours ensemble, donnent l'impression d'une seule corde et pour cette raison ne produisent aucune consonance. La quinte elle aussi est agréable, par le fait qu'à deux pulsations de la corde la plus grave correspondent chaque fois trois pulsations de la corde la plus aiguë : si donc l'on compte d'après les vibrations de cette dernière, un tiers de toutes les vibrations ont lieu ensemble, ce qui signifie que deux vibrations solitaires viennent s'intercaler entre chaque couple de vibrations concordantes; dans la quarte, ce sont trois vibrations solitaires qui viendront s'intercaler.» [*Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, trad. Clavelin, A. Colin, Paris 1970, p. 85. Je souligne]

¹⁰ «magis est composita» = dépasse en complexité.

par période, ce qui correspond bien à $3+2-1$). La coïncidence étant toujours unique, $p + q - 1$ pourra constituer une mesure *inverse* de la douceur de l'accord des deux sons p et q ¹¹.

On peut remarquer comme Yves Hellegouarch¹² que la fonction $(k_j p_j - k_i) + 1$ est un morphisme du monoïde (\mathbb{N}, \times) dans $(\mathbb{N}, +)$, ce qui n'est qu'une manière précise de désigner la nature de la fonction. Selon un commentaire oral de Jean Dhombres, il faut aussi noter que c'est la seule fonction qui respecte les nombres premiers (c'est-à-dire que pour p premier, le degré d'agrément de $1:p$ est p). Mais, étant donné la manière empirique dont Euler construit cette fonction, il semble extrêmement peu probable qu'il ait été parfaitement conscient de l'unicité de sa solution. Et Hellegouarch, à nouveau, n'a pas tort de dire que «beaucoup d'autres fonctions pourraient être proposées»¹³.

Quoi qu'il en soit de la méthode utilisée par Euler pour construire sa théorie musicale, nous disposons maintenant de ses éléments fondamentaux. La question de la consonance d'un ensemble de sons se trouve réduite, après division des composants par leur PGCD, au calcul du degré de douceur de leur PPCM par la formule encadrée ci-dessus. L'*Essai* d'Euler est enrichi de très nombreux et souvent très copieux tableaux; le premier qu'il nous présente est ainsi celui du classement des PPCM selon les seize premiers degré de douceur [OO, 3a, I, 234] :

¹¹ Ou, si l'on préfère, $1/(p + q - 1)$ pourra constituer une mesure directe de cette douceur. C'est cette valeur que Galilée, Mersenne et leur contemporains «auraient dû» trouver.

¹² Yves Hellegouarch, "L'«Essai d'une nouvelle théorie de la musique» de Leonhard Euler", publication de l'IREM de Caen, 19??, p. 53.

¹³ *Ibid.*

I	1;
II	2;
III	3, 4;
IV	6, 8;
V	5, 9, 12, 16;
VI	10, 18, 24, 32.
VII	7, 15, 20, 27, 36, 48, 64;
VIII	14, 30, 40, 54, 72, 96, 128;
IX	21, 25, 28, 45, 60, 80, 81, 108, 144, 192, 256;
X	42, 50, 56, 90, 120, 160, 162, 216, 288, 384, 512;
XI	11, 35, 63, 75, 84, 100, 112, 135, 180, 240, 243, 320, 324, 432, 576, 768, 1024;
XII	22, 70, 126, 150, 168, 200, 224, 270, 360, 480, 486, 640, 648, 864, 1152, 1536, 2048;
XIII	13, 33, 44, 49, 105, 125, 140, 189, 225, 252, 300, 336, 400, 405, 448, 540, 720, 729, 960, 972, 1280, 1296, 1728, 2304, 3072, 4096;
XIV	26, 66, 88, 98, 210, 250, 280, 378, 450, 504, 600, 672, 800, 810, 896, 1080, 1440, 1458, 1920, 1944, 2560, 2592, 3456, 4608, 6144, 8192;
XV	39, 52, 55, 99, 132, 147, 175, 176, 196, 315, 375, 450, 500, 560, 567, 675, 756, 900, 1008, 1200, 1215, 1344, 1600, 1620, 1792, 2160, 2187, 2880, 2916, 3840, 3888, 5120, 5184, 6912, 9216, 12288, 16384;
XVI	78, 104, 110, 198, 264, 294, 350, 352, 392, 630, 750, 840, 1000, 1120, 1134, 1350, 1512, 1800, 2016, 2400, 2430, 2688, 3200, 3240, 3584, 4320, 4374, 5760, 5832, 7680, 7776, 10240, 10368, 13824, 18432, 24576, 32768.

Je vais à présent focaliser mon attention sur la partie principale du travail d'Euler, à savoir son étude mathématique de l'harmonie, sans entrer toutefois dans tous les détails des règles de composition dont il nous gratifie, ni aborder les questions de durée des sons.

Etude des accords de deux sons

Le calcul du PPCM attaché à chaque accord, qu'Euler appelle son *exposant*, fournit, par le tableau précédent, un principe de classement des consonances donnant lieu à un nouveau tableau ([OO, 3a, I, 249]; je note en caractères gras les rapports qui correspondent aux consonances fondamentales et je souligne ceux qui correspondent aux traditionnelles dissonances¹⁴) :

II :	1:2
III :	1:3, 1:4
IV :	1:6, 2:3 , 1:8
V :	1:5, 1:9, 1:12, 3:4 , 1:16
VI :	1:10, 2:5, 1:18, 2:9, 1:24, 3:8, 1:32
VII :	1:7, 1:15, 3:5 , 1:20, 4:5 , 1:27, 1:36, 4:9, 1:48, 3:16; 1:64
VIII :	1:14, 2:7, 1:30, 2:15, 3:10, 5:6 , 1:40, 5:8 , 1:54, 2:27, 1:72, <u>8:9</u> , 1:96, 3:32, 1:128
IX :	1:21, 3:7, 1:25, 1:28, 4:7, 1:45, <u>5:9</u> , 1:60, 3:20, 4:15, 5:12, 1:80, 5:16, 1:81, 1:108, 4:27, 1:144, <u>9:16</u> , 1:192, 3:64, 1:256

¹⁴ Euler présente ces rapports dans l'ordre inverse de celui qui a cours aujourd'hui (1:2 au lieu de 2:1, etc.). On pourrait croire à un archaïsme, puisque les Grecs procédaient de cette manière. Mais en fait Euler recherche simplement à placer les nombres dans un ordre croissant.

X : 1:42, 3:14, 6:7, 1:50, 2:25, 1:56, 7:8, 1:90, 2:45, 5:18, 9:10, 1:120, 3:40, 5:24, 8:15, 1:160, 5:32, 1:162, 2:81, 1:216, 8:27, 1:288, 9:32, 1:384, 3:128, 1:512

Le classement des accords fondamentaux selon Euler est donc :

II	octave	1:2
IV	quinte	2:3
V	quarte	3:4
VII	6e maj.	3:5
VII	3e maj.	4:5
VIII	3e min.	5:6
VIII	6e min.	5:8
VIII	ton maj.	8:9
IX	gde 7e min	5:9
IX	pte 7e min.	9:16
X	ton min.	9:10
X	7e maj.	8:15

Pour les consonances, Euler retrouve ainsi l'un des deux classements que Mersenne avait déjà proposés dans l'*Harmonie universelle*¹⁵. Et comme le musicien minimise l'avait également avancé, Euler affirme qu'il n'y a pas de frontière nette entre consonances et dissonances; ces dernières ne sont que de «mauvaises» consonances, d'un degré élevé. Le tableau le montre clairement, puisqu'il place les deux consonances mineures (la tierce et la sixte) au même degré (VIII) que le ton majeur, ce qui n'est pas absurde du point de vue de la réalité perçue. Nous verrons ce que devient cette conception dans les derniers mémoires d'Euler sur la musique.

Etude des accords de plus de deux sons

Jusque-là rien de vraiment nouveau. Mais les fondements de la théorie recèlent bien d'autres choses! Comme on le remarque tout de suite dans le tableau des accords, à un même «exposant» (le PPCM) correspondent plusieurs groupes de sons possibles. C'est ainsi que, si l'on envisage des accords de plus de deux sons, le degré de douceur ne changera pas lorsqu'on ajoutera des sons correspondant à des diviseurs de l'exposant. 1:2:3:6 n'est pas plus «compliqué» que 1:6 ou 2:3, puisqu'ils ont tous les trois 6 pour PPCM. Et Euler de définir le concept d'accord *complet* : un accord sera tel si on ne peut lui ajouter aucune note sans que son degré ne devienne plus élevé, donc sans que son exposant ne soit plus complexe. Il en résulte qu'un accord est complet s'il comprend tous les diviseurs de son exposant. Selon Euler, l'oreille aura

¹⁵ Cf. notre article, déjà cité, «Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée», p. 82.

alors l'impression de plénitude dans ce degré d'agrément¹⁶. Ici commenceront les surprises pour quelqu'un qui refuse de se laisser entièrement entraîner par la fécondité de l'esprit du grand mathématicien.

Tâchons en effet de «revenir» à la musique du temps d'Euler. Le premier accord qu'on apprend à connaître (même encore aujourd'hui) est l'accord parfait majeur, le plus consonant de tous, représenté par exemple par les notes *ut mi sol*. Pour ne pas compliquer la situation, ne lui ajoutons pas l'octave supérieure (*ut*), encore que cela soit tout à fait commun. Ces trois notes correspondent aux trois nombres 4, 5, 6, dont le PPCM est 60. Cela révèle qu'il est —déjà!— du IX^e degré et que l'accord complet sera celui des 12 nombres : 1:2:3:4:5:6:10:12:15:20:30:60, c'est-à-dire des douze notes *ut₁ ut₂ sol₂ ut₃ mi₃ sol₃ mi₄ sol₄ si₄ mi₅ si₅ si₆*. Voilà donc un accord dont Euler nous prétend qu'il sera sur le même pied d'égalité de douceur que l'accord parfait majeur, un accord qui s'étale sur six octaves et qui outre les notes *ut, mi, sol*, comprendra aussi la septième majeure *si* de la fondamentale *ut*! Pour être plus *complet*, certes il le sera, mais sera-t-il réellement plus agréable? Sera-t-il aussi plus *praticable*? On peut en douter. Toutefois, à y réfléchir de plus près, cela n'est pas aussi absurde qu'on pourrait le penser. Car si l'on se réfère à la théorie moderne des sons partiels de Helmholtz, il est parfaitement exact que dans la production des sons *ut, mi, sol*, on entend également les partiels supérieurs de même nom, y compris le *si* qui est la quinte de *mi* et la tierce majeure de *sol*. Le tout est de savoir avec quelle intensité; et, en réalité, les notes *si₄ si₅ si₆* seront très faibles.

Que si l'on introduit «manuellement» un *ut₂*, l'accord *ut mi sol ut* correspondra aux nombres 4, 5, 6, 8, de PPCM 120. On montera alors d'un degré, la dernière note de l'accord complété étant un *si* de la septième octave. Ce surcroît de complexité théorique ne traduit pas fidèlement la réalité. En fait, ajouter ou non l'octave *ut* ne change guère la qualité de l'accord, ce dont Euler lui-même convient lorsqu'il analyse les *gammes* (cf. ci-dessous).

¹⁶ En conséquence :

- Si l'exposant est premier, l'accord complet sera composé de 2 notes : 1:a.
- Si l'exposant est a^m (a premier), l'accord complet sera composé de $(m + 1)$ notes : 1:a:a²:...: a^m.
- Si l'exposant est ab (a et b premiers), l'accord complet aura 4 notes : 1:a:b:ab.
- etc...

— Si l'exposant est $a^m b^n c^p$ (a, b, c premiers), l'accord complet sera composé de $(m+1)(n+1)(p+1)$ notes (c'est la règle, bien connue, sur le nombre de diviseurs d'un entier décomposé en produit de facteurs premiers).

Euler accompagne sa définition d'un immense tableau des accords complets des 12 premiers degrés.

Etude des successions d'accords

Ce chapitre, le cinquième du *Tentamen*, témoigne, s'il en était besoin, de l'originalité d'Euler en théorie de la musique. Car, si l'on avait prétendu avant lui «expliquer» les consonances par la concordance des coups des sons musicaux, on n'était pas allé plus loin dans cette voie. Or la musique n'est pas que la pure et simple exposition «picturale» de plusieurs harmonies; elle consiste aussi —et cela est peut-être encore plus important— en une succession réglée dans le temps d'une série d'harmonies.

L'idée d'Euler est simple : c'est la même que pour les accords pris séparément, c'est-à-dire que la douceur d'une succession dépendra de l'*ordre* qu'elle renferme. Cette douceur sera donc évaluée par le degré de l'*exposant* (le PPCM) de l'ensemble des sons des deux accords se succédant, comme s'ils étaient émis à la fois. Deux réserves, toutefois, devront être faites.

D'abord, comme des sons émis en même temps sonnent généralement plus durement que s'ils se suivent, on admettra des degrés moins bons (c'est-à-dire plus élevés) que dans le cas de simples consonances.

Ensuite, comme il ne s'agit plus d'un accord isolé, du point de vue d'une succession, l'éventuel facteur commun des nombres de vibrations d'un accord n'est plus à négliger (c'est-à-dire, par exemple, que 2:6:10 n'est plus forcément équivalent à 1:3:5). Cela complique les choses. Je préfère laisser la question de côté dans ce rapide aperçu¹⁷, me contentant de dire que la pertinence de l'interprétation d'Euler reste problématique : par exemple, la résolution d'un accord de septième de dominante sur l'accord parfait de tonique n'est pas nettement «expliquée», puisque l'exposant du second accord est entièrement inclus dans celui du premier¹⁸.

¹⁷ Cf. Mes études antérieures : "Deux mathématiciens musiciens : Euler et d'Alembert", *Physis, Rivista internazionale di storia della scienza*, vol. XXXII, Nuova Serie, Fasc. 1, 1995, p. 1-35 (communication au XIX^e Congrès International d'Histoire des sciences, Saragosse, 22-29 août 1993); "Sciences et musique : quelques grandes étapes en théorie musicale", à paraître dans *Littérature, Médecine, Société*, 13, Université de Nantes.

¹⁸ Voir mes commentaires dans les textes cités à la note précédente.

Les gammes du Tentamen

Euler donne à sa méthode une valeur universelle. Pour une succession de plus de deux accords, pour un morceau de musique entier (!) c'est le même principe d'évaluation : calculer l'exposant de tout l'ensemble et en déduire le degré de douceur.

Mais tout morceau est joué en respect de certaines *gammes*. La notion même de gamme est indispensable, car les instruments à sons fixes ne peuvent produire qu'un nombre limité de notes, dont l'ensemble constituera une gamme et correspondra à un certain exposant. Plus exactement, selon Euler, la notion de gamme repose sur celle d'octave : une gamme est une série de notes qu'on retrouve réparties périodiquement selon plusieurs octaves. Ici, *Euler ne donne pas d'autre justification que celle, a posteriori, de la conception des instruments existants*¹⁹, ce qui est un défaut de sa théorie qui se veut évidemment le plus a priori possible.

De ce principe supplémentaire résulte aussitôt que l'exposant d'une gamme sera de la forme $2^m A$, où A sera un produit de facteurs premiers ne contenant pas 2, autrement dit un nombre impair. Mais que sera plus précisément A ? Euler ne répond à cette question qu'après avoir passé en revue diverses gammes de la forme $2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$. Il cite Leibniz qui, dans une lettre à Christian Goldbach, disait déjà :

«Nos in Musica non numeramus ultra quinque, similes illis populis, qui etiam in Arithmetica non ultra ternarium progrediebantur, et in quibus phrasis Germanorum de homine simplice locum haberet : Er kan nicht über drey zählen.»²⁰

Euler développe tout de même une gamme où intervient le chiffre 7, mais à titre de pure hypothèse d'école (on va voir plus loin que son opinion sur cette question changera du tout au tout dans les années 1760) :

«Atque sane difficile esset in musicam praeter hos tres numeros alium, puta 7, introducere, cum consonantiae, in quarum exponentes septinarius ingrederetur, nimis dure sonarent harmoniamque turbarent.» [OO, 3a, I, 332]

La combinaison des puissances de 3 et 5 produit dix-huit gammes, parmi lesquelles Euler *en retient cinq* qui ont été ou sont encore en usage, en élimine quatre parce qu'elles sont contenues dans d'autres et en rejette neuf parce qu'elles sont soit trop simples, soit au contraire trop compliquées, c'est-à-dire qu'elles donnent des sons trop désagréables, soit les deux. La morale de cette classification me paraît claire et fort importante pour la théorie : le principe même qui la fonde (celui de l'ordre) ne suffit pas pour juger de la recevabilité d'une harmonie; en réalité, les données historiques jouent

¹⁹ [OO, 3a, I, 290], §5 et 6.

²⁰ La référence (sans citation précise) est faite dans le *Tentamen* page 332, à titre d'argument d'autorité. Plus tard, dans un article de 1764, Euler produit la citation complète [OO, 3a, I, 515], mais cette fois pour s'élever contre le principe qu'elle prétend poser.

maintenant un rôle essentiel, même dans le cas de la dernière gamme qu'Euler étudie en détail, la gamme diatonico-chromatique, qui se rapproche le plus de la musique contemporaine de notre mathématicien.

A présent, il ne semble pas exagéré de dire que nous venons de «faire le tour» de la théorie eulérienne contenue dans son œuvre de 1739 — un tour d'amateur, certes. Bien que fort abondante, elle peut se résumer à ceci : la notion d'*ordre* fonde le principe du goût. Cet ordre se mesure, comme dans l'ancienne théorie de la coïncidence des coups. Cependant, Euler va beaucoup plus loin qu'un simple classement des consonances. Il entend aussi justifier l'ensemble d'une série d'accords, en mesurant son ordre. Mais toutes les définitions, les nombreux calculs, les immenses tables que notre mathématicien déploie infatigablement ne doivent pas faire illusion. Un certain nombre d'éléments étrangers au principe de l'ordre sont introduits, d'autant plus «subrepticement» que, correspondant la plupart du temps à des principes admis par les théoriciens antérieurs, ils «passent» sans difficulté devant les yeux du lecteur. Ainsi en va-t-il particulièrement du rôle essentiel qu'Euler fait jouer au nombre 2, c'est-à-dire à l'octave, de la limitation aux seuls entiers 2, 3, 5 —d'où la construction d'un nombre fini de gammes—, de la restriction finale à une seule gamme. De toute manière, ces choix n'expliquent pas vraiment les successions harmoniques réellement utilisées par les musiciens. Je citerai une nouvelle fois Yves Hellegouarch, qui remarque plaisamment : «Est-ce à dire qu'une œuvre musicale reste aussi harmonieuse lorsqu'elle est jouée à l'envers?» Eh oui, en effet, le «principe de l'inversion du temps», comme en mécanique classique, s'applique parfaitement à la théorie du *Tentamen*. C'est dire qu'elle est loin d'être adéquate!

Au delà du Tentamen : l'évolution des idées d'Euler en matière de théorie musicale

En étudiant pour la première fois les textes d'Euler sur la théorie musicale, il me semblait évident qu'il n'avait jamais renoncé à sa théorie, même s'il avait voulu la compléter ou l'améliorer sur certains points jusqu'à la fin de sa vie. Je n'en suis plus tout à fait sûr aujourd'hui. En effet, les réflexions qu'il a ajoutées au *Tentamen*, tout spécialement celles qui portent sur l'accord de septième de dominante, tendent au contraire à montrer que c'était aux fondements mêmes de sa première théorie qu'il s'attaquait²¹.

²¹ Également, en 1773, les conceptions d'Euler en matière de physique du son musical sont devenues parfaitement «modernes» :

Dans un mémoire de 1764, «Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique», reconnaissant son importance pratique dans les compositions contemporaines, Euler examine l'accord de septième de dominante²². Aux notes *sol si ré fa* correspondent les nombres 36 45 54 64 d'exposant (leur PPCM) $8640 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$. Sans la «dissonance» *fa*, l'exposant de l'accord (parfait majeur) serait égal à 60

«et partant 144 fois plus petit qu'auparavant. D'où il semble que l'addition du son *f* gâte trop la belle harmonie de cette consonance pour qu'on lui puisse accorder une place dans la musique. Cependant, au jugement de l'oreille, cette dissonance n'est rien moins que désagréable et on s'en sert dans la musique avec le meilleur succès; il semble même que la composition musicale en acquiert une certaine force, sans laquelle elle serait trop unie. Voilà donc un grand paradoxe, où la théorie semble être en contradiction avec la pratique, dont je tâcherai de donner une explication.»

Rejetant l'explication de d'Alembert comme «trop arbitraire et éloignée des vrais principes de l'harmonie»²³, Euler commence par rappeler, fort adroitement et pertinemment, que l'oreille tolère de légers écarts dans les proportions des consonances (il n'est pas le premier à le remarquer, bien d'autres l'ont dit avant lui, mais peu importe ici) :

«Toutes les fois que cela arrive, la proportion aperçue est plus simple que la réelle et la différence est si petite qu'elle échappe à la perception.»

Dès lors rien n'interdit de supposer que l'oreille «substitue» le nombre 63 au nombre 64,

«Incipiamus igitur ab unisono, qui constat perfecta aequalitate duorum pluriumve sonorum musicorum; cum enim omnis sonitus motu vibratorio sive tremore in aere excitato producat, sive iste tremor fuerit aequabilis sive inaequabilis, in musica alii sorti non admittuntur, nisi ubi omnes vibrationes inter se sunt isochronae sive aequalibus tempusculis absolvuntur.» [OO, 3a, I, 569, mémoire "De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis"].

Maintenant, il n'est plus question d'*ictus* ou de *pulsus* et le traducteur peut correctement dire : «Commençons par l'unisson, qui consiste dans l'égalité parfaite de deux ou de plusieurs sons de musique. Tout son doit sa naissance à un mouvement vibratoire produit dans l'air, que les vibrations soient égales ou inégales entre elles; mais dans la musique on n'admet d'autres sons que ceux qui sont dus à des vibrations isochrones, c'est-à-dire à des vibrations effectuées en des temps égaux.» [OCF, 5, 253]

²² Cf. [OO, 3a, I, 509 et suiv.]. Euler considère aussi son premier renversement, dont il est inutile de parler ici.

²³ [OO, 3a, I, 510].

«afin que tous les nombres devenant divisibles par 9, les rapports de nos quatre sons soient maintenant exprimés par ces nombres 4, 5, 6, 7 dont la perception est sans doute moins embarrassée.»

On passe ainsi à un exposant de 420 au lieu de 8640 et (ce qu'Euler ne précise pas) on gagne deux degrés de douceur (degré 15 au lieu de 17). Euler trouve même cette idée astucieuse :

«Peut-être est-ce ici qu'est fondée la règle sur la préparation et la résolution des dissonances, pour avertir quasi les auditeurs, que c'est le même son, quoiqu'on s'en serve comme de deux différents, afin qu'ils ne s'imaginent pas qu'on ait introduit un son tout à fait étranger.» [OO, 3a, I, 515]

Voilà une interprétation originale. On sait en effet qu'on suppose d'habitude que préparation et résolution ne servent qu'à habituer l'oreille, préalablement et «postérieurement» si l'on peut dire, au son dissonant en le faisant entendre dans des consonances. Et Euler de conclure :

«On soutient communément qu'on ne se sert dans la musique que des proportions composées de ces trois nombres premiers 2, 3 et 5 et le grand Leibniz²⁴ a déjà remarqué que dans la musique on n'a pas encore appris à compter au-delà de 5; ce qui est aussi incontestablement vrai dans les instruments accordés selon les principes de l'harmonie. Mais, si ma conjecture a lieu, on peut dire que dans la composition on compte déjà jusqu'à 7 et que l'oreille y est déjà accoutumée²⁵; c'est un nouveau genre de musique, qu'on a commencé à mettre en usage et qui a été inconnu aux anciens. Dans ce genre l'accord 4, 5, 6, 7 est la plus complète harmonie, puisqu'elle renferme les nombres 2, 3, 5 et 7; mais il est aussi plus compliqué que l'accord parfait dans le genre commun qui ne contient que les nombres 2, 3 et 5. Si c'est une perfection dans la composition, on tâchera peut-être de porter les instruments au même degré.» [OO, 3a, I, 515]

Les changements théoriques sont beaucoup plus profonds qu'il n'y paraît. Pour commencer, le dogme de la restriction aux seuls nombres 2, 3, 5 est maintenant abandonné. Ensuite, il semblerait que la prédilection pour l'accord de dominante provienne de ce qu'il soit une consonance et non une dissonance. En réalité, il y a bien plus. Euler écrit dans un mémoire de 1764, «Du véritable caractère de la musique moderne» :

«À cette occasion il est important de remarquer que le mot de *dissonance* est peu propre à exprimer l'idée qu'on y attache; cette idée n'est rien moins qu'opposée à celle qu'on attache au mot de consonance, comme l'étymologie semble l'indiquer, et partant, puisque les consonances sont agréables à l'oreille, il ne faut pas s'imaginer que les dissonances lui soient désagréables, ou bien révoltantes; sur ce pied-là les dissonances devraient sans doute être entièrement bannies de toute la musique. Les dissonances ne

²⁴ Euler produit ici la citation que nous avons rapportée plus haut.

²⁵ Dans un autre article, Euler dit encore mieux : «nous pourrions dire avec feu Mr. de Leibniz que la musique a maintenant appris à compter jusqu'à sept.» [OO, 3a, I, 525]

diffèrent donc des consonances proprement ainsi dites que parce qu'elles sont moins simples ou plus compliquées, et il est également nécessaire que cette plus grande complication soit aussi bien agréable à l'oreille, que la simplicité des consonances.» [OO, 3a, I, 517]

Ce n'est plus exactement par l'impression agréable ou désagréable que consonances et dissonances sont distinguées, mais seulement par leur degré de complexité. Ainsi, au commencement, Euler avait construit le concept mathématique d'*exposant* pour rendre compte du *degré d'agrément* des combinaisons sonores. Mais pour finir, c'est la conception purement intellectuelle de la complexité, mesurée par l'*exposant*, qui prime. Les termes mêmes de *degré d'agrément* devraient maintenant être bannis, puisqu'une dissonance (l'accord de septième de dominante) est devenue agréable. Le mot même de *dissonance* n'a plus vraiment lieu d'être en usage²⁶! Je crois qu'en cette matière Euler est allé très loin, s'est montré très «moderne», même s'il n'a pas désavoué explicitement la théorie de son *Tentamen*.

Au surplus, sur ce point comme sur l'ensemble de sa théorie, on ne peut se former une opinion tant soit peu pertinente que si l'on fait appel à des explications plus récentes, en particulier celles qui sont fondées sur la perception des battements entre les sons partiels des notes musicales. Ces explications, issues de la théorie de Helmholtz, confirment entièrement le principe de l'absence de stricte ségrégation entre consonances et dissonances. Le tout est de savoir jusqu'à quel son partiel l'oreille étend sa perception. Or cela dépend de deux facteurs; d'une part de l'intensité physique relative des sons partiels (l'expérience montre que, statistiquement²⁷, elle diminue quand l'ordre du son partiel augmente), d'autre part de la capacité physiologique et mentale de l'homme à percevoir les battements selon la hauteur des sons simples qui les produisent. Helmholtz lui-même reprendra ainsi l'idée de la consonance de la septième mineure «naturelle» correspondant au rapport $7/4$ ²⁸.

²⁶ «Les musiciens conviennent bien que de tels accords [comme celui de septième de dominante] ne sauraient être conciliés avec les principes de l'harmonie et ils tâchent de les soutenir par le nom de dissonance qu'ils leur imposent; mais, s'ils entendent par ce terme un tel accord où l'oreille ne saurait découvrir aucun rapport, on devrait pouvoir se servir avec autant de succès de tout autre mélange de tons, quelque absurde qu'il soit; ce que les musiciens sont bien éloignés d'admettre.» [OO, 3a, I, 524]

²⁷ C'est-à-dire en moyenne selon les divers instruments. Seuls des instruments très timbrés comme la clarinette, présentent des sons partiels d'intensité élevée au-delà du dixième.

²⁸ Cf. Helmholtz, *Théorie physiologique de la musique, fondée sur l'étude des sensations auditives*, trad. G. Guérout, Paris, 1874 [*Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, 1863], p. 249, 293 et 441 pour les références à l'accord de

Mais la théorie des battements indique également tout de suite les limites de la théorie d'Euler. Car outre le fait qu'elle explique pourquoi l'oreille se contente de rapports approximatifs, elle nous apprend que tous les sons partiels n'ont pas la même importance et qu'ainsi l'«exposant» d'un accord est loin d'être le seul nombre à caractériser son degré de consonance ou de complexité. En particulier, ajouter tous les diviseurs premiers de l'exposant pour parvenir à ce qu'Euler appelle un accord «complet» n'améliorera pas l'accord, comme l'imagine notre mathématicien, mais conduira plutôt à la cacophonie de sons partiels pléthoriques.

rapport 7/4. Cependant, Helmholtz rejette finalement cet accord, comme d'autres fondés sur le nombre 7, pour la raison que son renversement est «pire que lui-même». Et il conclut qu'«il existe donc une véritable lacune dans la série des intervalles rangés suivant leur harmonie, et c'est cette lacune qui forme la limite entre les consonances et les dissonances.» (p. 293).