# SCIENCES ET MUSIQUE : QUELQUES GRANDES ETAPES EN THEORIE MUSICALE*

Patrice BAILHACHE

Département de Philosophie, Chemin de la Censive du Tertre

~~B.P. 1025, F-44036 Nantes Cedex 01, France~~

B.P. 81227, F-44312 Nantes Cedex 3, France

L'étude des rapports de la musique et des sciences peut s'engager dans deux directions. Ou bien les sciences sont prises comme un *moyen* et l'on pense alors, comme c'est la mode aujourd'hui, à la composition et à l'exécution qui mettent en œuvre des synthétiseurs, des ordinateurs, des machines à analyser et reproduire les sons; ou bien, tâche plus modeste dans ses résultats, mais plus ambitieuse dans ses principes, on rapproche sciences et musique afin de trouver un fondement théorique, sinon philosophique, à celle-ci. Le désir de savoir anime alors presque à lui tout seul le chercheur, qui n'attend aucun résultat *spectaculaire*, au sens propre de ce terme, puisque l'objet n'est pas de produire de la musique, mais d'en comprendre la nature par des principes scientifiques — si tant est que la chose soit possible.

Aussi téméraire semble cette entreprise, il faut croire cependant qu'elle en a tenté plus d'un : des mathématiciens grecs de l'Antiquité jusqu'aux physiciens, physiologistes et psychologues de notre siècle, de nombreux savants ont proposé des «explications» de la musique. Le sujet étant vaste, je me contenterai ici d'évoquer quatre cas exemplaires, attachés à trois dates distinctes et qui, à eux seuls, permettront je crois de se faire une idée cohérente de l'évolution générale des théories musicales. Ces quatre «cas» sont les suivants. D'abord celui de la *Division du canon*, un texte tiré du Corpus euclidien (mais certainement pas d'Euclide lui-même[1]); puis, en sautant au XVIII^e^ siècle, celui du *Tentamen novae theoriae musicae* d'Euler et celui des *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau* de d'Alembert. Finalement, je dirai quelques mots des conceptions de Helmholtz (*Théorie physiologique de la musique*), qui datent de la fin du XIX^e^ siècle et qui, comme j'ai tenté de le montrer ailleurs[2], n'ont guère été «dépassées» aujourd'hui.

---

[1] Cf. Jean Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann, 1961, p. 201; cf. aussi Paul Tannery, "Inauthenticité de la «Division du canon» attribuée à Euclide", in *Mémoires scientifiques*, tome III, Sciences exactes dans l'Antiquité, 1889-1913, Gauthier-Villars, 1915, p. 213-219.

[2] Cf. P. Bailhache, «Valeur actuelle de l'acoustique musicale de Helmholtz», *Revue d'histoire des sciences*, XXXIX/4, 1986, pp. 301-324. Le titre complet de l'ouvrage de Helmholtz est *Théorie physiologique de la musique, fondée sur l'étude des sensations auditives*, trad. G. Guéroult, Paris,

* A paraître dans *Littérature, médecine, société*, 13, Université de Nantes.

## 1. La *Division du canon* de l'école euclidienne

On connaît plusieurs textes anciens qui traitent de théorie musicale, sans compter les passages que des philosophes comme Platon, Aristote, etc. consacrent à la question. En réalité, l'intérêt des Grecs pour ce sujet est très ancien, la tradition faisant remonter aux pythagoriciens l'étude arithmétique des intervalles musicaux. Conscient du caractère extrêmement partiel du «coup d'œil» que je porte ici, je choisis le texte de la *Division du canon*[3], commode par sa brièveté, et cependant suffisamment révélateur du type d'approche pratiqué généralement par les Anciens[4].

Au départ un prologue déclare qu'il y a des sons, parce qu'il y a des chocs, c'est-à-dire un certain type de mouvements. Ces mouvements sont plus ou moins denses, plus ou moins nombreux; or «toutes choses composées de parties sont dites en rapport de nombre à nombre entre elles». Naturellement, par *nombre* entendons ici *nombre entier*, le seul concept numérique que les Grecs admettent. Deux sons musicaux, formant un *intervalle*, font donc entre eux un certain rapport numérique, une certaine *proportion*. Le postulat fondamental de la *Division du canon* est alors que *deux sons sont consonants lorsqu'ils correspondent à un intervalle multiple ou surperparticulier*. Ce postulat établit a priori, sans discussion possible, un rapport entre la qualité sensible

---

1874 [*Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, 1863].

[3] Je ne m'étendrai pas sur le titre du traité. Le mot *canon* (kanwn) est le terme employé par les Grecs anciens pour désigner le monocorde, cet instrument de théorie musicale destiné plus à l'expérience qu'à l'art, et qu'on peut imaginer comme un violon réduit à une seule corde. «Diviser le canon», c'est déterminer les différentes longueurs qu'on doit faire prendre au monocorde, à tension constante, afin de faire résonner toutes les notes possibles.

[4] Une des sources les plus importantes de théorie musicale dans l'Antiquité est celle des *Harmoniques* de Ptolémée (le célèbre astronome, II^e^ s. ap. J.C.). Elles ont été traduites en latin par le mathématicien anglais John Wallis et publiées (avec le texte grec) dans ses *Opera omnia* en 1699. Wallis les a accompagnées des *Commentaires* de Porphyre sur le texte de Ptolémée.

Mais si la majorité des théories anciennes sont de nature mathématique, il y a cependant une célèbre exception, celle d'Aristoxène de Tarente, un disciple d'Aristote de la fin du IVe s. av. J.C. (sans parler des brefs *Problèmes musicaux* d'Aristote lui-même). Dans son *Traité d'Harmonique*, Aristoxène s'oppose aux pythagoriciens; il rejette leurs calculs de pure arithmétique au profit d'une appréciation qualitative fondée sur les sensations sonores et utilise les concepts de *ton*, de *demi-ton*, et autres intervalles musicaux. Je reviendrai à lui lorsque je parlerai de d'Alembert, car celui-ci et Aristoxène ont ceci de commun qu'ils considèrent la musique comme un domaine de la physique, dont l'analyse doit ainsi nécessairement partir de l'expérience.

de la consonance (le fait que les deux sons soient agréables) et une certaine situation arithmétique[5].

Cela admis, le plan du traité, en deux parties, en découle logiquement. La première énonce et démontre une série de propositions purement arithmétiques, apparemment sans rapport avec la musique. La seconde partie *applique* les résultats de la première au cas de la musique, de sorte que la beauté musicale semble n'être plus qu'une question de mathématiques justiciable d'un traitement *more geometrico*.

Examinons pour commencer les premières propositions de la *Division du canon*[6]. Je me limiterai à de brefs commentaires, mon but n'étant pas d'étudier pour elles-mêmes ces propositions, mais de montrer ce que l'auteur euclidien en tire, et de quelle manière, pour établir sa théorie de la musique.

I. *Si un intervalle multiple, composé deux fois, fait un intervalle, ce dernier est aussi multiple*.

Sachant aujourd'hui qu'à la *composition* de deux intervalles correspond la multiplication des rapports qui les représentent, il est immédiat que le produit d'un rapport entier («multiple») par lui-même produit un rapport entier (ainsi la composition de deux octaves, de rapport 2, produit la double octave de rapport 4).

II. *Si un intervalle deux fois composé donne un intervalle multiple, cet intervalle est lui-même multiple*.

Cette seconde proposition est beaucoup moins évidente que la première. Traduite en termes modernes sans plus de réflexion, elle revient à dire que la racine carré d'un entier est un entier; ce qui semble tout à fait faux. Mais il faut comprendre que les seuls nombres dont il est question sont les entiers ou les rapports d'entiers, c'est-à-dire les nombres appelés aujourd'hui *rationnels*. Or il est bien exact que la racine carré d'un entier, si elle est rationnelle est nécessairement elle-même entière[7].

---

[5] Tannery remarque fort justement : «Si l'on se rend compte enfin de l'objet véritable que se propose l'auteur [de la *Division du canon*], il nous sera difficile, à nous modernes, de ne pas voir une gageure soutenue contre le bon sens, car il ne s'agit de rien moins que de déterminer *a priori*, sans effectuer aucune mesure, et avec le minimum de données empruntées aux connaissances musicales, quels sont les rapports numériques correspondant aux intervalles reconnus comme consonants.» Et il poursuit en mentionant la *République* de Platon (VII, 531) qui conseille, dans l'étude de la musique, de préférer la raison aux oreilles, et de rechercher quels sont les nombres consonants.

[6] Je me contenterai ici d'un examen superficiel, sans faire le rapprochement des propositions arithmétiques de notre texte musical avec les *Éléments* d'Euclide. Cf. sur point, par exemple, Jean Itard, *op. cit.*, p. 204; c'est le Livre VIII des *Éléments* avec lequel doit être fait le rapprochement.

[7] La *Division du canon* donne la «démonstration» suivante pour cette seconde proposition : «Soit l'intervalle BG et soit fait G à B comme B est à D, et que D soit multiple de G. Je dis que B est aussi multiple de G.

III. *Dans un intervalle superparticulier ne tombe ni un, ni plusieurs nombres moyens proportionnels*.

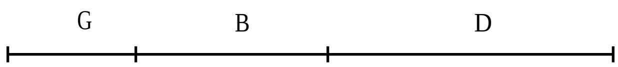
Un rapport superparticulier est une proportion pouvant être réduite à $\frac{n+1}{n}$ ,*n* étant entier. Exemple : $\frac{6}{4}$ qui peut être réduit à $\frac{3}{2}$ . Il est évident qu'il ne peut pas y avoir d'entier *m* tel que $\frac{n+1}{m} = \frac{m}{n}$ …[8]

Les deux propositions suivantes ne sont guère difficiles à comprendre, sinon à prouver.

IV. *Si un intervalle non multiple est composé deux fois, le tout n'est ni multiple, ni superparticulier.*

V. *Si un intervalle composé deux fois ne donne pas un intervalle multiple, il n'est pas lui-même multiple*.

---




Car puisque D est multiple de G, G mesure D. Mais nous avons appris que si autant de nombres qu'on voudra sont proportionnels et si le premier mesure le dernier, il mesure aussi les moyens. G mesure donc B et B est multiple de G». Tannery (*loc cit.*, p. 215-216)explique à juste titre que cette preuve «contient un paralogisme (au lieu d'un postulat posé dans le préambule, on invoque la réciproque de ce postulat, laquelle est absolument déraisonnable). Quoique ce paralogisme n'ait pas fait sourciller Porphyre, qui a reproduit presque tout l'opuscule dans son *Commentaire sur les Harmoniques de Ptolémée*, il a été remarqué dès l'antiquité, et l'on a essayé de démontrer autrement la même proposition, comme on peut le voir dans Boèce (*Inst. Mus.*, II, 21-22).

Pour comprendre que la proposition II est vraie, il suffit de l'écrire :

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = k \qquad k = h^2$$

où *m*, *n*, *k* et *h* sont entiers. Décomposant *m* et *n* en produits de facteurs premiers, les facteurs premiers de $m^2$ et $n^2$ figurent tous en nombre pair et la division, qui doit produire un entier, est elle-même un produit de facteurs premiers dont chacun apparaît un nombre pair de fois. Le résultat de cette division est donc le carré d'un entier (on peut aussi démontrer la même chose par l'absurde, comme dans le cas de l'irrationalité de la racine de 2).

[8] Le texte ajoute cet élément essentiel à la preuve, que le nombre de moyens pour un rapport réduit est le même que pour un rapport non réduit.

La septième proposition introduit les deux plus grands rapports superparticuliers. Selon leur définition, nous pouvons dire en effet que les rapports superparticuliers se rangent par ordre décroissant (ils tendent vers l'unité) selon que *n* croît :

$$\frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \cdots$$

Le premier, $\frac{3}{2}$, est appelé *sesquialtère*; le second, $\frac{4}{3}$, *sesquitierce*; le troisième, $\frac{5}{4}$, *sesquiquarte*; etc.

VI. *L'intervalle double est formé des deux intervalles superparticuliers maximaux, le sesquialtère et le sesquitierce*.

Cette proposition exprime seulement, on le voit, que le produit de $\frac{3}{2}$ par $\frac{4}{3}$ est le nombre 2.

Les trois propositions suivantes expriment, à leur manière, des résultats numériques du même genre.

C'est avec la dixième proposition que l'«application» à la musique commence. Il faut reconnaître que l'«effet démonstratif» est assez impressionnant, même si l'on garde conscience que le postulat du Prologue contient l'essentiel des conséquences musicales déductibles de la science arithmétique. Au surplus, des données de l'expérience sont introduites subrepticement, ce qu'il importe de bien percevoir, même si elles sont tout à fait élémentaires et parfaitement justifiables.

X. *Le diapason [octave] est un intervalle multiple.*

La proposition est accompagnée de cette démonstration :

> En effet deux sons distants d'un intervalle de deux octaves sont consonants. Cet intervalle de deux octaves est donc multiple ou superparticulier (Postulat du Prologue). Mais il ne peut pas être superparticulier (prop. 3), donc il est multiple. Donc l'octave est aussi multiple (prop. 2).

*Donnée de fait* : la double octave est consonante. De cette donnée sensible, du Postulat fondamental et des propositions arithmétiques précédemment prouvées résulte en pleine rigueur que l'intervalle d'octave est multiple. Bien entendu, on cherche à montrer que c'est l'intervalle double.

XI. *Le diatessaron [quarte] et le diapente [quinte] sont l'un et l'autre superparticuliers*.

Démonstration :

> Deux sons séparés de deux quartes sont dissonants, donc l'intervalle de deux quartes n'est pas multiple. Mais deux sons séparés par une quarte sont consonants. Donc la quarte est superparticulière. Même raisonnement pour la quinte.

Ce nouveau raisonnement, fort élégant, fait lui aussi appel à une donnée de fait, à savoir que la double quarte (et la double quinte) est dissonante. Puis la nature de l'octave est élucidée dans la proposition suivante.

XII. *Le diapason [octave] est un intervalle double*.

Démonstration :

> Il est multiple. Il est donc au moins double. Mais l'intervalle double est composé des deux plus grands intervalles superparticuliers. S'il était plus grand que l'intervalle double, il ne serait donc pas composé de deux superparticuliers. Or il est formé de la quarte et de la quinte qui sont superparticuliers. Donc il est double.

On voit qu'a lieu, là encore, un appel à une donnée de fait — ou plutôt à une expérience de «solfège» : l'octave est formé de la quarte et de la quinte. Seule l'expérience musicale peut nous apprendre cela, pas les mathématiques.

Après cet important résultat, d'autres suivent sans difficulté. La quinte est l'intervalle sesquialtère, la quarte le sesquitierce; quinte plus octave forment l'intervalle triple, deux octaves font l'intervalle quadruple; le ton, différence entre la quinte et la quarte, est un intervalle sesquioctave (9/8); etc. Voici déterminées les valeurs des proportions qui correspondent aux principaux intervalles musicaux[9].

Ainsi, moyennant un postulat de départ jetant *a priori* un pont entre le monde sensible des sons et le monde intelligible des nombres, moyennant aussi quelques données de fait admises sans discussion, les éléments essentiels de théorie musicale grecque se trouvent établis par démonstration. Comprendre les motifs et l'enjeu réel de la *Division du canon* est une tâche délicate. Car il est clair que si l'on s'avise de mettre en doute le postulat de départ, la raison d'être du texte disparaît aussitôt. Du point de vue de l'histoire des idées, en revanche, il est intéressant de chercher à déterminer ce que le traité serait susceptible d'apporter si l'on admettait son postulat initial. Or, puisqu'on est en présence de propositions accompagnées de leurs preuves, il est facile de faire le partage entre ce qui est posé et ce qui prouvé. On peut ainsi dire avec précision quels «axiomes» sont requis pour parvenir à tel théorème. Par exemple, pour atteindre le résultat que l'octave est l'intervalle double, il faut admettre que la double octave est consonante (prop. X), que la quarte est consonante mais pas la double quarte, que,

[9] Le reste de la *Division du canon* contient encore les énoncés de trois inégalités (l'octave est inférieure à six tons…), une proposition sur l'impossibilité de diviser le ton en plusieurs parties égales et, finalement, quatre propositions qui expliquent comment trouver les longueurs des cordes de la lyre, étant sous-entendu qu'à tensions et natures égales les longueurs des cordes sont inversement proportionnelles aux hauteurs des sons (Tannery a d'ailleurs montré que les deux dernières propositions ont été ajoutées à une époque postérieure à la rédaction de ce qui précède; cf. *op. cit.*, p. 213-215).

semblablement, la quinte est consonante mais pas la double quinte (prop. XI) et que l'octave est formée de la quarte et de la quinte (prop. XII). Ayant prouvé que l'octave est l'intervalle double, on a aussi prouvé par là même que l'octave est consonante. Mais ce résultat de sensation sonore n'est pas énoncé par l'auteur de la *Division du canon* et cela se comprend : puisqu'il a dû admettre comme une donnée de l'expérience que la quarte et la quinte sont consonantes, *a fortiori* devrait-il le faire pour l'octave, un intervalle perçu comme plus consonant. Mais d'un autre côté, la construction axiomatique du traité ne l'y oblige pas et c'est pourquoi il ne le fait pas.

Tout l'ensemble du traité tend vers un but : déduire logiquement les proportions arithmétiques attachées aux intervalles musicaux à partir du postulat initial et de données de «solfège». Ce que l'on découvre ici, c'est que l'axiomatique qui autorise cette déduction est, au sens même que les logiciens contemporains donnent à ce terme, peu *naturelle*. Pour que toutes les conséquences de théorie musicale soient déductibles, il est nécessaire de choisir des axiomes suffisamment forts. D'où une certaine bizarrerie, la démarche ne procédant pas toujours du simple au complexe : par exemple, la consonance de l'octave se trouve tirée de celle de la double octave, et non l'inverse. Cette situation rappelle tout à fait celle des systèmes axiomatiques «classiques» (c'est-à-dire non *naturels*), du genre de ceux de Russell, dans lesquels une proposition simple (comme la loi de la double négation, la loi du tiers exclu,…) est déduite d'axiomes qui sont moins simples qu'elle-même. On sait que cette bizarrerie, ainsi que le désir de trouver aisément des démonstrations, a justement été à l'origine des systèmes logiques dits de *déduction naturelle*[10], dans lesquels la preuve va toujours du simple au

---

[10] Ainsi, par exemple, pour prouver la loi de la double négation ($\neg\neg p \leftrightarrow p$, i.e. la proposition non non $p$ est équivalente à la proposition $p$) dans le système des *Principia mathematica* de Russell et Whitehead, une déduction d'une vingtaine de lignes est nécessaire. Cette déduction part des quatre axiomes du système :

A1 $\neg(p \quad p) \quad p$
A2 $\neg q \quad (p \quad q)$
A3 $\neg(p \quad q) \quad (q \quad p)$
A4 $\neg(\neg q \quad r) \quad (\neg(p \quad q) \quad (p \quad r))$

qui, on le voit, sont plus complexes que la thèse à prouver. Que le simple soit déductible à partir du complexe soit possible dans un tel système provient de la présence, dans les règles de déduction, de la règle dite *Modus Ponens* (ou règle de détachement); cette règle autorise à tirer le conséquent $\beta$ d'une implication $\alpha \rightarrow \beta$, dès lors que l'antécédent $\alpha$ et l'implication elle-même ont été prouvés. Le seul conséquent $\beta$ est en effet plus simple que l'implication $\alpha \rightarrow \beta$.

Dans un système de déduction naturelle, au contraire, la preuve de tout théorème part toujours de séquences élémentaires qui doivent avoir la forme $\alpha \quad \alpha$. La règle *Modus Ponens* n'est pas complexe et où le théorème à prouver, pour ainsi dire, contient en germe sa propre démonstration. Exactement comme le logicien des systèmes classiques doit dépenser de gros efforts pour «inventer» les démonstrations de ses théorèmes, et paraît par là même plus «génial» que celui qui pratique mécaniquement la déduction naturelle, de même l'auteur de la *Division du canon* se trouve conduit à faire preuve d'une certaine virtuosité logique pour concentrer dans quelques axiomes (de «solfège») et déduire d'eux tout son savoir musical. C'est de là que vient l'apparence de puissance démonstrative du traité. Mais en définitive, cela n'a rien de surprenant. On le savait bien, l'axiomatique euclidienne est de nature classique et non pas *naturelle*; et on en a ici un bon exemple.

## 2. L'apogée de la musique arithmétique : le *Tentamen novae theoriae musicae* de Leonard Euler (1739)[11]

Au milieu du XVIII^e siècle, au moment où la musique dite classique acquiert ses lettres de noblesse avec Bach (1685-1750), Haendel (1685-1759), Rameau (1683-1764), Haydn (1732-1809), Mozart (1756-1791), etc., deux mathématiciens particulièrement illustres, Euler et d'Alembert, produisent des théories de la musique. Le fait n'est évidemment pas le résultat d'un «hasard historique». Il représente au contraire la prolongation d'une tradition[12]. Du reste, au siècle précédent, plusieurs savants avaient déjà pris la fantaisie de porter leur attention sur le même sujet : Descartes (*Compendium musicae*), Galilée (fin de la 1^re journée des *Discorsi*), Mersenne (l'énorme ouvrage de l'*Harmonie universelle*), Leibniz «en amateur»[13]. Mais au XVIII^e siècle, c'est la musique

utilisée. Les premiers systèmes de déduction naturelle remontent à Herbrand et surtout à Gerard Gentzen.

[11] J'analyserai également les quelques articles que, presque jusqu'à sa mort, le mathématicien suisse a consacrés à la théorie de la musique, et qui apportent une ou deux nouveautés par rapport au *Tentamen*. En revanche, je laisserai de côté les pages dévolues au même sujet dans les *Lettres à une princesse d'Allemagne* (seulement 16 pages sur près de 600). Elles contiennent seulement une sorte d'extrait ultra-simplifié du *Tentamen*.

[12] Au Moyen Age le *quadrivium* désignait les quatre «arts» mathématiques : l'arithmétique, la musique, la géométrie et l'astronomie. Ce quadrivium constituait la partie supérieure du savoir, par opposition au *trivium*, la partie élémentaire, qui, elle, comprenait la grammaire, la rhétorique et la dialectique.

[13] Cf. notre ouvrage *Leibniz et la théorie de la musique*, Klincksieck, coll. "Domaine musicologique", 1992, 158 p.

elle-même qui change, l'harmonie classique détrônant définitivement le contrepoint médiéval. Il fallait donc expliquer ce changement, en faire la théorie, et la tâche pouvait inspirer, à juste titre, tout savant féru de musique.

Euler (1707-1783) a 24 ans lorsqu'il écrit, en 1731, son *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (*Essai d'une nouvelle théorie de la musique, exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie les mieux fondés*). C'est une œuvre de 263 pages, écrite en latin, qui ne sera publiée qu'en 1739. A cette époque Euler est déjà connu comme mathématicien et se trouve à St Pétersbourg, où il occupera bientôt la chaire de mathématiques. Il est fort intéressé par tout ce qui touche à la musique. Il a publié à Bâle, en 1727, une «thèse sur le son» où il compare les sons produits par les cordes vibrantes avec ceux engendrés par les instruments à vent.

Vers 1726 déjà, Euler avait projeté le plan d'une œuvre considérable sur la musique. A part le fait que les sons devaient y être notés par des numéros d'ordre dans la gamme, l'objet d'étude restait proche des réalités musicales. La dernière section, par exemple, devait analyser les différentes sortes de morceaux de musique (sarabande, courante, etc.). Mais le départ du mathématicien pour St Pétersbourg (1727) et ses autres travaux l'empêchèrent de poursuivre dans cette voie initiale. C'est finalement une œuvre beaucoup plus mûrie qui vit le jour en 1739[14].

Au reste, Euler resta toute sa vie intéressé par les questions de musique. Il apporta des précisions à sa nouvelle théorie par quelques articles[15], montrant, comme nous le verrons, qu'il savait tenir compte des critiques qu'on avait adressées à ses conceptions.

Passant sur le premier chapitre (sur le son et l'ouïe), j'en viens tout de suite aux fondements de la théorie musicale d'Euler (exposés dans le deuxième chapitre «De suavitate et principiis harmoniae»). Comment expliquer que certains sons sont agréables et d'autres non? Il semble paradoxal de trouver une règle, puisque les mêmes choses ne plaisent pas à tout le monde, ou que le goût d'une même personne peut évoluer. Peut-on enfermer un art, comme la musique, dans des lois? Euler répond que, comme pour tous les beaux-arts, il faut se fier à l'opinion des personnes éclairées, donc en musique celles dont l'oreille a été exercée et qui pourront apercevoir les justes lois que dicte la nature :

> «Sed Musicum similem se genere oportet Architecto, qui plurimorum perversa de aedificiis iudicia non curans secundum certas et in natura ipsa fundatas leges aedes

---

[14] [OO, 3a, I, x-xiv] Cette référence, comme les suivantes d'Euler, renvoie aux *Opera Omnia*, series tertia, volumen primum, «Opera physica, miscellanea, epistolae; Lipsiae et Berolini, 1926.

[15] la plupart en français.

> exstruit; quae etiamsi harum rerum ignaris non placeant, tamen, dum intelligentibus probentur, contentus est.» [OO, 3a, I, 224]

Cette remarque préalable étant faite, Euler affirme que tout plaisir provient de la *perception de la perfection*, tout être normalement constitué recherchant celle-ci :

> «Certum est enim perceptionem perfectionis voluptatem parere hocque omnium spirituum esse proprium, ut perfectionibus detegendis et intuendis delectentur, ea vero omnia, in quibus vel perfectionem deficere vel imperfectionem adesse intelligunt, aversentur.» [OO, 3a, I, 225]

Cependant, comme nous le montre l'exemple d'une horloge, la perfection se réduit à l'*ordre*.

> «Contemplemur exempli causa horologium, cuius finis est temporis partes et divisiones ostendere: id maxime nobis placebit, si ex eius structura intelligimus omnes eius partes ita esse confectas et inter se conjunctas, ut omnes ad tempus exacte indicandum concurrant.»
> «Ex hisce sequitur, in qua re insit perfectio, in eadem ordinem necessario inesse debere.» [OO, 3a, I, 225]

> «Vicissim igitur etiam intelligitur, ubi sit ordo, ibi etiam esse perfectionem et legem regulamve ordinis respondere scopo perfectionem efficienti.» [OO, 3a, I, 226]

Cette notion de l'ordre est la clé de la théorie. Toutefois, il reste encore à l'adapter au domaine de la musique. Or l'ordre des choses peut être perçu de deux façons : ou bien l'on connaît déjà les règles et l'on en reconnaît la présence immédiatement; ou bien les règles sont inconnues, et l'on doit alors les rechercher, les dévoiler (detego); la musique est conforme à ce second processus :

> «Duobus autem modis ordinem percipere possumus; altero, quo lex vel regula nobis iam est cognita, et ad eam rem propositam examinamus; altero, quo legem ante nescimus atque ex ipsa partium rei dispositione inquirimus, quaenam ea sit lex, quae istam structuram produxerit. Exemplum horologii supra allatum ad modum priorem pertinet; iam enim est cognitus scopus seu lex partium dispositionis, quae est temporis indicatio; ideoque horologium examinantes dispicere debemus, an structura talis sit, qualem scopus requirit. Sed si numerorum seriem aliquam ut hanc 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 etc. ascipio nescius, quae eorum progressionis sit lex, tum paullatim eos numeros inter se conferens deprehendo quemlibet esse duorum antecedentium summam hancque esse legem oerum ordinis affirmo.»
> «Posterior modus percipiendi ordinis ad musicam praecipue spectat» [OO, 3a, I, 226]

Reste à déterminer en quoi consiste l'ordre des sons. Il est essentiellement de deux types : selon ce qu'on appelle aujourd'hui la *hauteur* (grave ou aigu) ou selon la *durée*. On pourrait aussi parler d'ordre selon l'intensité, mais cet ordre est peu quantifiable et assez aléatoire, puisqu'un compositeur ne peut indiquer que de façon imprécise l'intensité des sons.

Et finalement, reconnaissant la prééminence de l'ordre de la hauteur sur celui de la durée, puisque celle-là se mesure par les fréquences de vibration, Euler ramène l'évaluation du plaisir musical à la mesure arithmétique des proportions attachées aux sons.

Cette «métaphysique» de la musique n'est pas totalement nouvelle. Le «résultat» de la métaphysique eulérienne se trouvait déjà dans l'Antiquité chez les Grecs, qui avaient fondé la science musicale sur la théorie des proportions (cf. la *Division du canon* de l'école euclidienne). De même, l'idée que la musique consiste en la perception indirecte (ou plus précisément inconsciente) des rapports des fréquences sonores est énoncée par Leibniz :

> «musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi.»[16]

Mais, en dépit de ces identités thématiques, il convient de souligner les différences qui font l'originalité d'Euler. D'abord, ainsi qu'on va pouvoir bientôt en juger, la théorie de notre mathématicien dépasse de très loin la simple considération des rapports des fréquences de deux sons. Ensuite, contrairement à ses prédécesseurs qui, eux aussi, fondaient leur théorie sur les proportions presque sans aucune explication, Euler ébauche une argumentation philosophique, dans laquelle des proportions on parvient au plaisir musical, via l'ordre et la perfection. Quant à la source leibnizienne, on peut sans doute en reconnaître l'influence dans la distinction que fait Euler entre les deux modes de perception de l'ordre. Mais on notera que, contrairement au maître de Hannovre, il ne s'aventure pas à parler de perception inconsciente; peut-être n'en admet-il pas la notion, ou bien, tout simplement, préfère-t-il appliquer son génie à développer des calculs mathématiques plutôt que des considérations philosophiques.

Cela dit, examinons comment Euler évalue l'ordre des sons selon leur hauteur. Par l'intermédiaire des vibrations de l'air, les instruments de musique produisent des *coups* ou chocs [ictus] réguliers sur notre tympan. Par souci de clarté, Euler visualise ces coups, dans le cas des accords les plus simples *de deux sons*, par les figures suivantes :

**1** . . . . . . . . . . . . . . . .

Fig. 1

**2** . . . . . . . . . . . . . . . .<br>**1** . . . . . . . .

Fig. 2

**3** . . . . . . . . . . . . . . . .<br>**1** . . . . . .

Fig 3

**4** . . . . . . . . . . . . . . . .

---

[16] «La musique est une pratique occulte de l'arithmétique dans laquelle l'esprit ignore qu'il compte.» (lettre à Chr. Goldbach du 17/4/1712). Cf. notre livre, déjà cité, *Leibniz et la théorie de la musique*, p. 151.

1 . . . .

Fig. 4

3 . . . . . . . . . . . . . . . .
2 . . . . . . . . . . .

Fig. 5

etc…[OO, 3a, I, 231]

La démarche d'Euler est alors la suivante.

— Une note unique, ou deux notes à l'unisson, (fig. 1) donne l'ordre le plus simple. Il répond au rapport 1:1 et correspond au *premier degré de douceur* [primum suavitatis gradum].

— Le rapport 1:2, qui est celui de l'octave (fig. 2), donne l'ordre le plus simple après celui de l'unisson : c'est le deuxième degré de douceur.

— Les rapports 1:3 et 1:4 sont assez simples (fig. 3 et 4); le premier (celui de la quinte de l'octave supérieure) comporte des nombres plus petits, mais le deuxième est double de la proportion double (c'est la double octave) donc facile à percevoir. Ils sont regroupés dans le même degré de douceur : le troisième.

— Euler attache ensuite le degré $n+1$ au rapport $1:2^n$, chaque puissance de 2 incrémentant le degré d'une unité.

Remarquant alors, que 1:5 doit être plus complexe que 1:8 ($=1:2^3$), lequel a le degré 4, Euler lui attribue le degré 5 et en déduit par induction que pour $p$ premier $1:p$ est de degré $p$. Ensuite, cette fois pour $p$ quelconque :

> «[…] si ratio $1 : p$ ad gradum, cuius index sit $m$, referatur, rationem $1 : 2p$ ad gradum $m + 1$ pertinere, $1 : 4p$ ad gradum $m + 2$ et $1 : 2^n p$ ad gradum $m + n$. Multiplicato enim numero $p$ per 2 ad rationis perceptionem requiritur praeter perceptionem rationis $1 : p$ bisectio aut duplicatio, qua ut simplicissima operatione gradus suavitatis unitate evehitur.»

Et Euler poursuit en calculant le degré qu'il faut attacher à $1:pq$, $p$ et $q$ étant de nouveau premiers :

> «Simili modo determinare licet gradum suavitatis rationis $1 : pq$, si $p$ et $q$ fuerint numeri primi; nam ratio $1 : pq$ eo magis est composita quam $1 : p$, quo $1 : q$ magis est composita quam 1 : 1. Ergo rationis $1 : pq$ gradus cum $p$, $q$ et 1 debet proportionem arithmeticam constituere, unde erit igitur $p + q - 1$.» [OO, 3a, I, 232]

Finalement, en appliquant plusieurs fois cette règle, on peut généraliser, ce qui produit une formule qu'Euler n'écrit pas, mais qui revient à :

$$\boxed{1:p_1^{k_1}\ p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} \text{ a pour degré } \Sigma(k_i p_i - k_i) + 1}$$

les nombres $p_i$ étant premiers et les $k_i$ étant des exposants positifs quelconques de ces nombres.

Les cas de plus de deux sons se ramènent facilement à cette formule. Ainsi, quatre sons dans les rapports 1:*p*:*q*:*r*, avec *p*, *q*, *r* premiers, seront assimilés à 1:*pqr*[17]. Lorsque les nombres de vibrations ne sont pas premiers, la procédure est un peu plus compliquée. Considérons par exemple les sons correspondant à 1:*pr*:*qr*:*ps* (*p*, *q*, *r*, *s* étant premiers). *p* et *r* interviennent deux fois, mais étant confondus par l'oreille, ils ne doivent être pris qu'une fois; de sorte que l'ensemble sera assimilé à 1:*pqrs*, qui est le *plus petit commun multiple* (PPCM) des facteurs proposés.

Restent les cas où l'un des nombres de vibrations n'est pas 1. La quinte 3:2 en est un exemple. On commencera alors par réduire éventuellement les nombres en les divisant par leur *plus grand commun diviseur* (PGCD) (ex : 4:6:8 donne 2:3:4), puis, comme tout à l'heure, on prendra leur PPCM. C'est ainsi que la quinte revient au PPCM 6 et est donc du quatrième degré.

Arrêtons-nous là dans cet exposé, ce qui vient d'être dit appelant plusieurs remarques.

L'idée de mesurer le degré de douceur d'un accord de deux sons par l'ordonnancement des *coups* qu'on imagine être le propre d'un son musical n'est pas nouvelle. Bien au contraire, elle se rattache directement à ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui la théorie de *la coïncidence des coups*, c'est-à-dire cette théorie qui représentait ce qu'on pourrait appeler, au sens de Kuhn, la théorie «normale» au temps de Galilée et Mersenne. Selon cette théorie, un accord est d'autant plus consonant que les coups «coïncidants» issus des deux sons sont en proportion plus élevée dans l'ensemble des coups produits. Mais, à la vérité, au XVII^e^ siècle, les calculs ne sont jamais poussés bien loin et, qui plus est, une erreur fort étrange est systématiquement commise. Au lieu de prendre la proportion en question, on considère celle des coups coïncidants par rapport au nombre de coups *du son le plus aigu seulement*[18].

---

[17] Les nombres premiers issus de deux sons différents doivent être distincts. Sinon, 1:*p*:*p* sera assimilé à 1:*p* et non à 1:$p^2$, car les deux sons *p* sont saisis par l'oreille comme un son unique.

[18] Cf. par exemple notre étude «Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée», *Sciences et techniques en perspective*, 23, spécialement §3, p. 81 à 88. Cette erreur est commise par Galilée sans aucune ambiguïté : «Ainsi la première et la plus agréable consonance sera celle de l'octave, puisqu'à chaque percussion du tympan due à la corde la plus grave correspondent deux percussions provoquées par la corde la plus aiguë : à l'occasion d'une vibration sur deux de la corde la plus aiguë les effets viendront donc se conjuguer, en sorte que la moitié des percussions au total battront l'oreille ensemble; de leur côté deux cordes à l'unisson, vibrant toujours ensemble, donnent l'impression d'une seule corde et pour cette raison ne produisent aucune consonance. La quinte elle aussi est agréable, par le fait qu'à deux pulsations de la corde la plus grave correspondent chaque fois trois pulsations de la corde la plus aiguë : si donc l'*on compte d'après les vibrations de*

Une seconde remarque concerne la démarche d'Euler. Elle est plutôt surprenante. Tout tient en fait dans le degré de douceur $p + q - 1$ attaché au rapport $1{:}pq$, où, ce qui revient au même, à deux sons $p$ et $q$ (ces nombres étant premiers entre eux). Nous avons vu qu'Euler parvient à ce résultat par une sorte de raisonnement analogique : le rapport $1{:}pq$ «dépasse»[19] $1{:}p$ comme $1{:}q$ dépasse 1:1. Il faut donc que son degré soit une proportion arithmétique de $p$, $q$ et de 1, ce qui produit logiquement $p + q - 1$. On ne peut pas dire que cette déduction jouisse d'une grande rigueur et emporte la conviction, d'autant que le résultat antérieur (le degré $p$ de $1{:}p$) se trouve lui-même obtenu par une synthèse du même ordre de vraisemblance.

Or je dis que le résultat $p + q - 1$ était directement accessible, d'une façon beaucoup plus rigoureuse. Il suffisait pour cela de calculer *correctement* le degré de douceur de l'accord $p{:}q$ conformément à la théorie de la coïncidence des coups. Si $p$ et $q$ sont deux nombres premiers (ou même premiers entre eux) distincts, il est bien clair que durant une *période* aucun de leurs coups ne coïncideront, excepté ceux du début et de la fin de la période. Il n'y aura donc qu'un seul coup coïncidant par période (la fin d'une période étant le début de la période suivante). Et le nombre total des coups sera la somme de tous les coups, $p + q$, diminuée d'une unité puisque les deux coups coïncidants ne seront perçus que comme un seul. (sur l'exemple de la quinte, fig. 5 ci-dessus, on voit qu'il y a une coïncidence et quatre coups [y compris cette coïncidence] par période, ce qui correspond bien à 3+2-1). La coïncidence étant toujours unique, $p + q - 1$ pourra constituer une mesure *inverse* de la douceur de l'accord des deux sons $p$ et $q$[20].

Quoi qu'il en soit de la méthode utilisée par Euler pour construire sa théorie musicale, nous disposons maintenant de ses éléments fondamentaux. La question de la consonance d'un ensemble de sons se trouve réduite, après division des composants par leur PGCD, au calcul du degré de douceur de leur PPCM par la formule encadrée ci-dessus. L'*Essai* d'Euler est enrichi de très nombreux et souvent très copieux tableaux; le premier qu'il nous présente est ainsi celui du classement des PPCM selon les seize premiers degré de douceur [OO, 3a, I, 234] :

I 1;

---

*cette dernière*, un tiers de toutes les vibrations ont lieu ensemble, ce qui signifie que deux vibrations solitaires viennent s'intercaler entre chaque couple de vibrations concordantes; dans la quarte, ce sont trois vibrations solitaires qui viendront s'intercaler.» [*Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, trad. Clavelin, A. Colin, Paris 1970, p. 85. Je souligne]

[19] «magis est composita» = dépasse en complexité.

[20] Ou, si l'on préfère, $1/(p + q - 1)$ pourra constituer une mesure directe de cette douceur. C'est cette valeur que Galilée, Mersenne et leur contemporains «auraient dû» trouver.

| | |
|---|---|
| II | 2; |
| III | 3, 4; |
| IV | 6, 8; |
| V | 5, 9, 12, 16; |
| VI | 10, 18, 24, 32. |
| VII | 7, 15, 20, 27, 36, 48, 64; |
| VIII | 14, 30, 40, 54, 72, 96, 128; |
| IX | 21, 25, 28, 45, 60, 80, 81, 108, 144, 192, 256; |
| X | 42, 50, 56, 90, 120, 160, 162, 216, 288, 384, 512; |
| XI | 11, 35, 63, 75, 84, 100, 112, 135, 180, 240, 243, 320, 324, 432, 576, 768, 1024; |
| XII | 22, 70, 126, 150, 168, 200, 224, 270, 360, 480, 486, 640, 648, 864, 1152, 1536, 2048; |
| XIII | 13, 33, 44, 49, 105, 125, 140, 189, 225, 252, 300, 336, 400, 405, 448, 540, 720, 729, 960, 972, 1280, 1296, 1728, 2304, 3072, 4096; |
| XIV | 26, 66, 88, 98, 210, 250, 280, 378, 450, 504, 600, 672, 800, 810, 896, 1080, 1440, 1458, 1920, 1944, 2560, 2592, 3456, 4608, 6144, 8192; |
| XV | 39, 52, 55, 99, 132, 147, 175, 176, 196, 315, 375, 450, 500, 560, 567, 675, 756, 900, 1008, 1200, 1215, 1344, 1600, 1620, 1792, 2160, 2187, 2880, 2916, 3840, 3888, 5120, 5184, 6912, 9216, 12288, 16384; |
| XVI | 78, 104, 110, 198, 264, 294, 350, 352, 392, 630, 750, 840, 1000, 1120, 1134, 1350, 1512, 1800, 2016, 2400, 2430, 2688, 3200, 3240, 3584, 4320, 4374, 5760, 5832, 7680, 7776, 10240, 10368, 13824, 18432, 24576, 32768. |

Je vais à présent focaliser mon attention sur la partie principale du travail d'Euler, à savoir son étude mathématique de l'harmonie, sans entrer toutefois dans tous les détails des règles de composition dont il nous gratifie, ni aborder les questions de durée des sons.

***Etude des accords de deux sons***

Le calcul du PPCM attaché à chaque accord, qu'Euler appelle son *exposant*, fournit, par le tableau précédent, un principe de classement des consonances donnant lieu à un nouveau tableau ([OO, 3a, I, 249]; je note en caractères gras les rapports qui correspondent aux consonances fondamentales et je souligne ceux qui correspondent aux traditionnelles dissonances[21]) :

| | |
|---|---|
| II : | **1:2** |
| III : | 1:3, 1:4 |
| IV : | 1:6, **2:3**, 1:8 |
| V : | 1:5, 1:9, 1:12, **3:4**, 1:16 |
| VI : | 1:10, 2:5, 1:18, 2:9, 1:24, 3:8, 1:32 |
| VII : | 1:7, 1:15, **3:5**, 1:20, **4:5**, 1:27, 1:36, 4:9, 1:48, 3:16; 1:64 |
| VIII : | 1:14, 2:7, 1:30, 2:15, 3:10, **5:6**, 1:40, **5:8**, 1:54, 2:27, 1:72, <u>8:9</u>, 1:96, 3:32, 1:128 |
| IX : | 1:21, 3:7, 1:25, 1:28, 4:7, 1:45, <u>5:9</u>, 1:60, 3:20, 4:15, 5:12, 1:80, 5:16, 1:81, 1:108, 4:27, 1:144, <u>9:16</u>, 1:192, 3:64, 1:256 |
| X : | 1:42, 3:14, 6:7, 1:50, 2:25, 1:56, 7:8, 1:90, 2:45, 5:18, <u>9:10</u>, 1:120, 3:40, 5:24, <u>8:15</u>, 1:160, 5:32, 1:162, 2:81, 1:216, 8:27, 1:288, 9:32, 1:384, 3:128, 1:512 |

[21] Euler présente ces rapports dans l'ordre inverse de celui qui a cours aujourd'hui (1:2 au lieu de 2:1, etc.). On pourrait croire à un archaïsme, puisque les Grecs procédaient de cette manière. Mais en fait Euler recherche simplement à placer les nombres dans un ordre croissant.

Le classement des accords fondamentaux selon Euler est donc :

| | | |
|---|---|---|
| II | octave | 1:2 |
| IV | quinte | 2:3 |
| V | quarte | 3:4 |
| VII | 6e maj. | 3:5 |
| VII | 3e maj. | 4:5 |
| VIII | 3e min. | 5:6 |
| VIII | 6e min. | 5:8 |
| VIII | ton maj. | 8:9 |
| IX | gde 7e min | 5:9 |
| IX | pte 7e min. | 9:16 |
| X | ton min. | 9:10 |
| X | 7e maj. | 8:15 |

Pour les consonances, Euler retrouve ainsi l'un des deux classements que Mersenne avait déjà proposés dans l'*Harmonie universelle*[22]. Et comme le musicien minime l'avait également avancé, Euler affirme qu'il n'y a pas de frontière nette entre consonances et dissonances; ces dernières ne sont que de «mauvaises» consonances, d'un degré élevé. Le tableau le montre clairement, puisqu'il place les deux consonances mineures (la tierce et la sixte) au même degré (VIII) que le ton majeur, ce qui n'est pas absurde du point de vue de la réalité perçue.

***Etude des accords de plus de deux sons***

Jusque là rien de vraiment nouveau. Mais les fondements de la théorie recèlent bien d'autres choses! Comme on le remarque tout de suite dans le tableau des accords, à un même «exposant» (le PPCM) correspondent plusieurs groupes de sons possibles. C'est ainsi que, si l'on envisage des accords de plus de deux sons, le degré de douceur ne changera pas lorsqu'on ajoutera des sons correspondant à des diviseurs de l'exposant. 1:2:3:6 n'est pas plus «compliqué» que 1:6 ou 2:3, puisqu'ils ont tous les trois 6 pour PPCM. Et Euler de définir le concept d'accord *complet* : un accord sera tel si on ne peut lui ajouter aucune note sans que son degré ne devienne plus élevé, donc sans que son exposant ne soit plus complexe. Il en résulte qu'un accord est complet s'il comprend tous les diviseurs de son exposant. Selon Euler, l'oreille aura alors l'impression de plénitude dans ce degré d'agrément[23]. Ici commenceront les

[22] Cf. notre article, déjà cité, «Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée», p. 82.

[23] En conséquence :
— Si l'exposant est premier, l'accord complet sera composé de 2 notes : 1:*a*.
— Si l'exposant est $a^m$ (*a* premier), l'accord complet sera composé de ($m$ + 1) notes : $1{:}a{:}a^2{:}\ldots{:}a^m$.
— Si l'exposant est *ab* (*a* et *b* premiers), l'accord complet aura 4 notes : 1:*a*:*b*:*ab*.
— etc…

surprises pour quelqu'un qui refuse de se laisser entièrement entraîner par la fécondité de l'esprit du grand mathématicien.

Tâchons en effet de «revenir» à la musique du temps d'Euler. Le premier accord qu'on apprend à connaître (même encore aujourd'hui) est l'accord parfait majeur, le plus consonant de tous, représenté par exemple par les notes *ut mi sol*. Pour ne pas compliquer la situation, ne lui ajoutons pas l'octave supérieure (*ut*), encore que cela soit tout à fait commun. Ces trois notes correspondent aux trois nombres 4, 5, 6, dont le PPCM est 60. Cela révèle qu'il est —déjà!— du IX$^{e}$ degré et que l'accord complet sera celui des 12 nombres : 1:2:3:4:5:6:10:12:15:20:30:60, c'est-à-dire des douze notes $ut_1$ $ut_2$ $sol_2$ $ut_3$ $mi_3$ $sol_3$ $mi_4$ $sol_4$ $si_4$ $mi_5$ $si_5$ $si_6$. Voilà donc un accord dont Euler nous prétend qu'il sera sur le même pied d'égalité de douceur que l'accord parfait majeur, un accord qui s'étale sur six octaves et qui outre les notes *ut*, *mi*, *sol*, comprendra aussi la septième majeure *si* de la fondamentale *ut*! Pour être plus *complet*, certes il le sera, mais sera-t-il réellement plus agréable? Sera-t-il aussi plus *praticable*? On peut en douter. Toutefois, à y réfléchir de plus près, cela n'est pas aussi absurde qu'on pourrait le penser. Car si l'on se réfère à la théorie moderne des sons partiels de Helmholtz (la meilleure théorie encore actuellement[24]), il est parfaitement exact que dans la production des sons *ut*, *mi*, *sol*, on entend également les partiels supérieurs de même nom, y compris le *si* qui est la quinte de *mi* et la tierce majeure de *sol*. Le tout est de savoir avec quelle intensité; et, en réalité, les notes $si_4$ $si_5$ $si_6$ seront très faibles.

Que si l'on introduit «manuellement» un $ut_2$, l'accord *ut mi sol ut* correspondra aux nombres 4, 5, 6, 8, de PPCM 120. On montera alors d'un degré, la dernière note de l'accord complété étant un *si* de la septième octave. Ce surcroît de complexité théorique ne traduit pas fidèlement la réalité. En fait, ajouter ou non l'octave *ut* ne change guère la qualité de l'accord; on verra ci-dessous que la construction théorique de Rameau et d'Alembert, dans laquelle l'équivalence des octaves est admise en principe et par expérience, permet une bien meilleure interprétation. D'ailleurs, comme on va d'abord le voir, Euler lui-même est contraint d'admettre ce principe.

### *Etude des successions d'accords*

Ce chapitre, le cinquième du *Tentamen*, témoigne, s'il en était besoin, de l'originalité d'Euler en théorie de la musique. Car, s'il on avait prétendu avant lui «expliquer» les consonances par la concordance des coups des sons musicaux, on

---

— Si l'exposant est $a^m\, b^n\, c^p$ ($a$, $b$, $c$ premiers), l'accord complet sera composé de $(m+1)(n+1)(p+1)$ notes (c'est la règle, bien connue, sur le nombre de diviseurs d'un entier décomposé en produit de facteurs premiers).

Euler accompagne sa définition d'un immense tableau des accords complets des 12 premiers degrés.

[24] Cf. ci-dessus la fin de l'introduction.

n'était pas allé plus loin dans cette voie. Or la musique n'est pas que la pure et simple exposition «picturale» de plusieurs harmonies; elle consiste aussi —et cela est peut-être encore plus important— en une succession réglée dans le temps d'une série d'harmonies.

L'idée d'Euler est simple : c'est la même que pour les accords pris séparément, c'est-à-dire que la douceur d'une succession dépendra de l'*ordre* qu'elle renferme. Cette douceur sera donc évaluée par le degré de l'*exposant* (le PPCM) de l'ensemble des sons des deux accords se succédant, comme s'ils étaient émis à la fois. Deux réserves, toutefois, devront être faites.

D'abord, comme des sons émis en même temps sonnent généralement plus durement que s'ils se suivent, on admettra des degrés moins bons (c'est-à-dire plus élevés) que dans le cas de simples consonances.

Ensuite, comme il ne s'agit plus d'un accord isolé, du point de vue d'une succession, l'éventuel facteur commun des nombres de vibrations d'un accord n'est plus à négliger (c'est-à-dire, par exemple, que 2:6:10 n'est plus forcément équivalent à 1:3:5). Cela complique les choses. Voici comment Euler résout le problème, et introduit au passage une notion nouvelle, celle du *rang* [ordo] d'une succession.

Soient $A$ et $B$ les exposants de deux accords réduits[25]. Pour éclairer l'exposé, je prendrai un exemple (pas d'Euler, car les siens ne reflètent pas suffisamment la généralité) : $A = 2.3^2.5 = 60$, $B = 1.3.7 = 21$. Soient d($A$) et d($B$) les degrés de douceurs attachés à ces accords; d($A$) = 9, d($B$) = 9. Prenons alors des accords non réduits. Cela signifie que, pour un accord, chacun de ses nombres de vibrations se trouve multiplié par un facteur entier commun. Euler l'appelle l'*indice* de l'accord et ainsi tout accord se trouve à présent caractérisé par son exposant et son indice. Soient $a$ et $b$ les indices des deux accords. Par exemple $a = 3$, $b = 1$. Les produits $Aa = 2.3^3.5$, $Bb = 1.3.7$ des exposants $A$, $B$ des accords réduits par leurs indices respectifs $a$, $b$ rendent compte de la douceur des accords non réduits (c'est-à-dire, en réalité, de leur douceur et de leur hauteur absolue). Si l'on veut calculer l'exposant de l'ensemble de ces deux accords, il convient, comme on le fait pour les composants d'un simple accord, de diviser ces deux nombres par leur PGCD; ici PGCD($Aa$,$Bb$) = 3. L'exposant de la succession sera donc[26] :

[25] C'est-à-dire dont les composants ont été divisés par leur PGCD; le terme «réduit» est de moi.

[26] Bien qu'Euler ne manipule que la quantité $\frac{Aa.Bb}{\mathrm{PGCD}(Aa,Bb)}$, elle est égale au PPCM de $Aa$ et $Bb$, ce qui est plus simple à exprimer et à calculer.

On peut justifier $\mathrm{PPCM}(x,y) = \frac{x.y}{\mathrm{PGCD}(x,y)}$ de la façon suivante. Soient $x = \mathrm{PGCD}.\,X$ et $y = \mathrm{PGCD}.\,Y$, où $X$ et $Y$ sont premiers entre eux (s'ils ne l'étaient pas, leurs facteurs communs entreraient dans le PGCD). Immédiatement, $\mathrm{PPCM} = \mathrm{PGCD}.\,X.\;Y = \frac{x.y}{\mathrm{PGCD}(x,y)}$ .

$$\frac{Aa.Bb}{\mathrm{PGCD}(Aa,Bb)} = \mathrm{PPCM}(Aa,Bb) = 2.3^3.5.7 = 1890$$

Par la formule encadrée ci-dessus[27], on calcule que le degré de douceur est 18.

Prenons maintenant les accords sans multiplicateurs, c'est-à-dire avec des indices égaux à 1. Des calculs semblables donnent :

$$\mathrm{PPCM}(Aa,Bb) = \mathrm{PPCM}(A,B) = 2.3^2.5.7 = 630$$

Le degré de douceur est maintenant 16. Euler appelle $M$ cet exposant de l'ensemble $A$, $B$ et énonce comme une évidence que l'exposant d'une succession avec des indices quelconques sera un multiple de $M$. Cela est en effet intuitif, de même qu'il est facile de comprendre que le nombre $M$ pourra être obtenu même avec des indices non unitaires[28]. Par exemple $a = 1$, $b = 3$ donnent $Aa = 2.3^2.5$, $Bb = 1.3^2.7$ et :

$$\mathrm{PPCM}(Aa,Bb) = 2.3^2.5.7 = 630$$

En fait, il est bien clair que les facteurs premiers du PPCM de $A$ et $B$ seront toujours présents dans PPCM($Aa$,$Bb$), ce qui démontre que $M$ est bien l'exposant minimal.

Soit alors $nM$ l'exposant de la succession. $n$ est un entier supérieur ou égal à 1. *Euler appelle le degré de douceur de cet entier le* rang *de la succession*. Ainsi, dans les exemples ci-dessus, à la succession de degré 16 correspond le rang 1, à celle de degré 18 le rang 3. Curieusement, Euler ne fait pas explicitement le lien entre degré de douceur et rang d'une succession[29]. Pourtant les choses sont claires. Etant donnée la formule des degrés composés :

$$\text{degré}(P.Q) = \text{degré}(P) + \text{degré}(Q) - 1,$$

le degré d'une succession d'exposant $nM$ est égal à celui d'une succession ayant l'exposant minimal $M$, augmenté du degré de $n$, moins 1.

Euler achève alors le chapitre en présentant une vaste table de successions d'accords (avec leurs exposants[30] et leurs indices), classées selon leurs rangs.

Quelle est la signification exacte de la notion de rang d'une succession? Curieusement encore, Euler ne la donne pas, mais l'idée est suffisamment nette pour qu'on puisse le faire à sa place. Pour une succession, comme pour des accords isolés, le degré de douceur est encore le principal critère esthétique. Mais, remarque Euler, si

---

[27] Euler propose de calculer ce degré à partir de ceux de $A$, $a$, $B$, $b$ et du PGCD($Aa$,$Bb$). Mais cela n'est pas plus simple.

[28] Cf. OO, 3a, I, 269, §25.

[29] Il se contente de la mise en garde : «Hic vero cavendum est, ne ordines successionum cum gradibus suavitatis confundantur.» [OO, 3a, I, 268]

[30] En fait, comme le rang dépend essentiellement du rapport entre les exposants des deux accords, Euler se limite à des exposants de la forme $pA$, $qA$, avec $p$ et $q$ = 1, 2, 3, etc.

l'on en restait là, cela conduirait à des successions trop monotones. Un excès de consonances engendre l'ennui (bien d'autres théoriciens ont exprimé cela avant le mathématicien de St Pétersbourg : Descartes, Mersenne, Leibniz,…). Il faut donc admettre des degrés de douceurs moins bons que les degrés minimaux. Or, dans ce cas, l'important est de «sauver» ce qui peut l'être et, précisément, l'emploi de deux accords étant alors admis a priori, la seule chose qui restera à faire sera de minimaliser le degré de douceur de leur succession : c'est bien ce que permet de réaliser l'étude des rangs des successions. Pour emprunter une image aux mathématiques, on peut dire que la notion de rang représente la douceur d'une succession «quotientée» par la douceur propre des accords qui la constituent.

Mais pour nous faire une opinion tant soit peu pertinente, nous allons considérer deux exemples, empruntés aux successions les plus communes en musique, à savoir 1) celle de l'accord parfait majeur suivi de l'accord de quarte et sixte; 2) celle de la «résolution» de l'accord de septième de dominante par l'accord parfait majeur.

1) La succession *ut mi sol* → *ut fa la* correspond aux nombres :

| *ut* | *mi* | *sol* | *ut* | *fa* | *la* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |

soit en entiers, *séparément pour chaque accord* :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 3 | 4 | 5, |

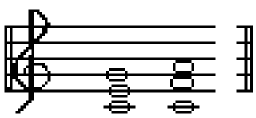
ce qui donne

$$A = 2^2.3.5 \qquad B = 2^2.3.5.$$

Première constatation, plutôt déconcertante, l'exposant de l'accord de quarte et sixte est le même que celui de l'accord parfait; mais, après tout, cela signifie seulement que le renversement de quarte et sixte est de même douceur que l'accord fondamental. On a

$$M = \text{PPCM}(A, B) = A = B = 60 \text{ (degré 9)}$$

Cependant, ces entiers ne représentent pas la succession réellement jouée, dans laquelle le *ut* de chaque accord est à la même hauteur :



Il faut donc partir du PPCM des deux *ut* ci-dessus, c'est-à-dire

| *ut* | *mi* | *sol* | *ut* | *fa* | *la* |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 15 | 18 | 12 | 16 | 20 |

ce qui revient à prendre les *indices*

$$a = 3 \qquad b = 4$$

et donc

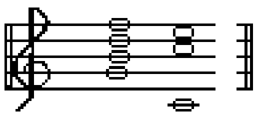
$$Aa = 2^2.3^2.5 \qquad Bb = 2^4.3.5$$

On a ainsi

$$\mathrm{PPCM}(Aa, Bb) = 2^4.3^2.5 = (2^2.3).(2^2.3.5) = 12\,M \quad \text{(degré 13)}.$$

Le nombre 12 étant de degré 5, cela veut dire que la succession réellement jouée est du 5e rang. Pourquoi un ordre si élevé pour l'un des enchaînements les plus ordinaires de la musique? La réponse est simple. La théorie d'Euler est ainsi faite que si l'on se limitait à une succession de rang 1, les deux accords n'en feraient qu'un seul. Il ne faut pas oublier, en effet, que pour Euler les deux groupes 4:5:6 et 3:4:5 ne sont que des parties de la série 1:2:3:4:5:6:10:12:15:20:30:60 de l'accord *complet* d'exposant 60. Cela n'est pas absurde, mais nous donne pour le moins une représentation fort originale de l'harmonie et justifie tout de même assez mal la faveur très généralement accordée à la succession en question.

1) La succession *sol si ré fa* → *ut ut mi*, c'est-à-dire celle de la «résolution» de l'accord de septième de dominante sur l'accord parfait de tonique[31] :



correspond aux nombres :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *sol* | *si* | *ré* | *fa* | *ut* | *ut* | *mi* |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{8}{3}$ | 1 | 2 | $\frac{5}{2}$ |

soit en entiers, *séparément pour chaque accord* :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 45 | 54 | 64 | 2 | 4 | 5, |

ce qui donne

$$A = 2^6.3^3.5 = 8640 \qquad B = 2^2.5 = 20$$

et $\quad M = \mathrm{PPCM}(A, B) = A$ (degré 16).

Ici, la surprise est que l'accord de dominante contient entièrement l'accord consonant qui suit (et même l'accord parfait majeur de tonique) et que la succession (du premier rang) n'apporte donc rien! Un calcul immédiat[32] montre même que l'addition d'indices ajustant

---

[31] La nécessité de faire monter la sensible à la tonique et descendre la sous-dominante *fa* au troisième degré *mi*, tout en conduisant la dominante *sol* à la tonique *ut*, entraîne que dans le passage de l'accord de septième de dominante à l'accord parfait de tonique l'un des deux accords est forcément incomplet; ici j'ai choisi *ut ut mi* au lieu de *ut sol ut mi* (cf. par exemple Théodore Dubois, *Traité d'harmonie théorique et pratique*, Heugel, Paris, 1921, p. 70). Au surplus, comme il est facile de le constater par des calculs élémentaires, cela ne change rien aux conclusions que je tire.

[32] Pour mettre les deux accords à leur exacte hauteur relative, il suffit d'ajuster la tonique basse *ut* du second accord à la bonne hauteur par rapport à celle de la basse *sol* du premier accord; cette

à leurs bonnes hauteurs respectives les deux accords ne change pas l'exposant de la succession, qui reste de rang 1. A en croire Euler[33], le passage de l'accord de septième de dominante à l'accord parfait de tonique ne correspondrait ainsi à aucune *résolution* de dissonance (la septième *fa* descendant sur *mi*). Pire, cette succession serait d'un meilleur rang que celle des accords consonants de tout à l'heure (mais tout de même d'un moins bon degré, puisqu'égal à 16 au lieu de 13). Que faut-il penser de tout cela? Nous allons bientôt le comprendre, avec l'étude que notre mathématicien fait sur les gammes[34].

#### ***Les gammes du*** **Tentamen**

Les deux chapitres qui suivent celui que nous venons d'étudier concernent les «séries de consonances» et les intervalles musicaux. On me permettra de passer rapidement. Lorsqu'on a affaire à une succession de plus de deux accords, Euler adopte le même principe d'évaluation : calculer l'exposant de tout l'ensemble et en déduire le degré de douceur. L'exposant de toute la série d'accords déterminera en quelque sorte les "limites" de l'œuvre musicale; Euler l'appelle son *mode*.

Un mode étant donné, on en déduit immédiatement quelles notes peuvent être utilisées (tous les diviseurs du mode). Il est possible de changer de mode dans une même œuvre musicale. Ces changements de mode obéiront aux mêmes règles que les successions d'accords. Euler ajoute à cela des règles de pratique, que seul le sens esthétique justifie; ainsi, par exemple, la complexité ne doit-elle croître que progressivement.

Le chapitre sur les intervalles est surtout intéressant pour le «raccordement» qu'il accomplit entre les concepts classiques d'octave, quinte, etc., jusqu'aux plus petits intervalles comme le limma, le dièse, le comma syntonique, et les degrés de douceurs eulériens.

L'exposé sur les gammes est plus original. La notion même de gamme est indispensable, car les instruments à sons fixes ne peuvent produire qu'un nombre limité de notes, dont l'ensemble constituera une gamme et correspondra à un certain exposant. Plus exactement, selon Euler, la notion de gamme repose sur celle d'octave : une gamme est une série de notes qu'on retrouve réparties périodiquement selon

---

dernière note étant représentée par le nombre 36, le *ut* en question, qui est une quinte au-dessous, correspondra au nombre 36.2/3 = 24. Il faut donc multiplier les nombres du second accord par 12. Ainsi, $b = 12 = 2^2.3$ et $Bb = 2^4.3.5$. Les facteurs de ce nombre étant totalement compris dans ceux de $A$, le PPCM ne change pas.

[33] Toutefois, c'est moi qui considère ces exemples, pas Euler lui-même. Mais je fais une stricte application de sa théorie.

[34] La gamme diatonique «corrigée» (cf. *infra*) correspond à l'exposant $2^m.3^3.5$. Elle contient donc entièrement la succession de la cadence parfaite, ce qui n'a rien de surprenant.

plusieurs octaves. Ici, *Euler ne donne pas d'autre justification que celle, a posteriori, de la conception des instruments existants*[35], ce qui est un défaut de sa théorie qui se veut évidemment le plus a priori possible.

De ce principe supplémentaire résulte aussitôt que l'exposant d'une gamme sera de la forme $2^m A$, où $A$ sera un produit de facteurs premiers ne contenant pas 2, autrement dit un nombre impair. Mais que sera plus précisément $A$? Euler ne répond à cette question qu'après avoir passé en revue diverses gammes de la forme $2^m.3^n.5^p$. Et de citer Leibniz qui, dans une lettre à Christian Goldbach, disait déjà :

> «Nos in Musica non numeramus ultra quinque, similes illis populis,qui etiam in Arithmetica non ultra ternarium progrediebantur, et in quibus phrasis Germanorum de homine simplice locum haberet : Er kan nicht über drey zählen.»[36]

Euler développe tout de même une gamme où intervient le chiffre 7, mais à titre de pure hypothèse d'école :

> «Atque sane difficile esset in musicam praeter hos tres numeros alium, puta 7, introducere, cum consonantiae, in quarum exponentes septinarius ingrederetur, nimis dure sonarent harmoniamque turbarent.» [OO, 3a, I, 332]

La combinaison des puissances de 3 et 5 produit dix-huit gammes, parmi lesquelles Euler *en retient cinq* qui ont été ou sont encore en usage, en élimine quatre parce qu'elles sont contenues dans d'autres et en rejette neuf parce qu'elles sont soit trop simples, soit au contraire trop compliquées, c'est-à-dire qu'elles donnent des sons trop désagréables, soit les deux[37]. La morale de cette classification me paraît claire et fort importante pour la théorie : le principe même qui la fonde (celui de l'ordre) ne suffit pas pour juger de la recevabilité d'une harmonie; en réalité, les données historiques jouent maintenant un rôle essentiel, même dans le cas de la dernière gamme qu'Euler étudie, la gamme diatonico-chromatique, qui se rapproche le plus de la musique contemporaine de notre mathématicien.

---

[35] [OO, 3a, I, 290], §5 et 6.

[36] La référence (sans citation précise) est faite dans le *Tentamen* page 332, à titre d'argument d'autorité. Plus tard, dans un article de 1764, Euler produit la citation complète [OO, 3a, I, 515], mais cette fois pour s'élever contre le principe qu'elle prétend poser.

[37] Les gammes retenues sont (en omettant le facteur systématique $2^m$) :

| | |
|---|---|
| $3^2$ | (gamme du tétracorde ancien) |
| $3^3.5$ | (gamme diatonique corrigée) |
| $3^2.5^2$ | (gamme chromatique corrigée) |
| $3.5^3$ | (gamme enharmonique corrigée) |
| $3^3.5^2$ | (gamme diatonico-chromatique, la plus importante) |

Les gammes contenues dans d'autres qui sont admises sont : $3.5$, $3^2.5$, $3.5^2$, $5^3$.

Les gammes rejetées sont : $1$, $3$, $5$, $5^2$, $3^3$, $3^4$,$5^4$, $3^5$, $3^4.5$.

D'ailleurs, la distinction entre les gammes éliminées parce que contenues dans d'autres et les gammes purement et simplement rejetées n'est pas très nette.

A cette gamme d'exposant $2^m.3^3.5^2$, PPCM des exposants $2^m.3^3.5$ et $2^m.3^2.5^2$ des gammes diatoniques et chromatiques, Euler consacre la majeure partie des chapitres restants. Voulant sans doute rendre compte au maximum de la musique de son temps, il étudie en détail la gamme elle-même, les consonances dans cette gamme, les modes, ce qu'il appelle les *systèmes*, et les diverses manières de composer. L'exposé de ces chapitres dépasserait les limites de notre article; au surplus l'important n'est pas là.

Car il est maintenant bien clair que nous avons, pour ainsi dire, «fait le tour» de la théorie eulérienne contenue dans son œuvre de 1739. Bien que fort abondante, elle peut se résumer à ceci : la notion d'*ordre* fonde le principe du goût. Cet ordre se mesure, comme dans l'ancienne théorie de la coïncidence des coups. Cependant, Euler va beaucoup plus loin qu'un simple classement des consonances. Il entend aussi justifier l'ensemble d'une série d'accords, en mesurant son ordre. Mais toutes les définitions, les nombreux calculs, les immenses tables que notre mathématicien déploie infatigablement ne doivent pas faire illusion. Un certain nombre d'éléments étrangers au principe de l'ordre sont introduits, d'autant plus «subrepticement» que, correspondant la plupart du temps à des principes admis par les théoriciens antérieurs, ils «passent» sans difficulté devant les yeux du lecteur. Ainsi en va-t-il particulièrement du rôle essentiel qu'Euler fait jouer au nombre 2, c'est-à-dire à l'octave, de la limitation aux seuls entiers 2, 3, 5 —d'où la construction d'un nombre fini de gammes—, de la restriction finale à une seule gamme. De toute manière, ces choix n'expliquent pas vraiment les successions harmoniques réellement utilisées par les musiciens.

### ***Au delà du* Tentamen**

Bien qu'il n'ait jamais renoncé à sa théorie, Euler en a perçu le caractère injustifié de certaines limitations. Le cas le plus évident et le plus intéressant est celui de la restriction aux seuls nombres 2, 3, 5. Dans un mémoire de 1764, «Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique», reconnaissant son importance pratique dans les compositions contemporaines, Euler examine l'accord de septième de dominante[38]. Aux notes *sol si ré fa* correspondent les nombres 36 45 54 64 d'exposant (leur PPCM) 8640 = $2^6.3^3.5$. Sans la «dissonance» *fa*, l'exposant de l'accord (parfait majeur) serait égale à 60

> «et partant 144 fois plus petit qu'auparavant. D'où il semble que l'addition du son *f* gâte trop la belle harmonie de cette consonance pour qu'on lui puisse accorder une place dans la musique. Cependant, au jugement de l'oreille, cette dissonance n'est rien moins que désagréable et on s'en sert dans la musique avec le meilleur succès; il semble même que la composition musicale en acquiert une certaine force, sans laquelle elle serait trop

---

38 Cf. [OO, 3a, I, 509 et suiv.]. Euler considère aussi son premier renversement, dont il est inutile de parler ici.

unie. Voilà donc un grand paradoxe, où la théorie semble être en contradiction avec la pratique, dont je tâcherai de donner une explication.»

Rejetant l'explication de d'Alembert comme «trop arbitraire et éloignée des vrais principes de l'harmonie»[39], Euler commence par rappeler, fort adroitement et pertinemment, que l'oreille tolère de légers écarts dans les proportions des consonances :

«Toutes les fois que cela arrive, la proportion aperçue est plus simple que la réelle et la différence est si petite qu'elle échappe à la perception.»

Dès lors rien n'interdit de supposer que l'oreille «substitue» le nombre 63 au nombre 64,

«afin que tous les nombres devenant divisibles par 9, les rapports de nos quatre sons soient maintenant exprimés par ces nombres 4, 5, 6, 7 dont la perception est sans doute moins embarrassée.»

On passe ainsi à un exposant de 420 au lieu de 8640 et (ce qu'Euler ne précise pas) on gagne deux degrés de douceur (degré 15 au lieu de 17). Euler trouve même cette idée astucieuse :

«Peut-être est-ce ici qu'est fondée la règle sur la préparation et la résolution des dissonances, pour avertir quasi les auditeurs, que c'est le même son, quoiqu'on s'en serve comme de deux différents, afin qu'ils ne s'imaginent pas qu'on ait introduit un son tout à fait étranger.» [OO, 3a, I, 515]

Voilà une interprétation originale. On sait en effet qu'on suppose d'habitude que préparation et résolution ne servent qu'à habituer l'oreille, préalablement et «postérieurement» si l'on peut dire, au son dissonant en le faisant entendre dans des consonances. Et Euler de conclure :

«On soutient communément qu'on ne se sert dans la musique que des proportions composées de ces trois nombres premiers 2, 3 et 5 et le grand Leibniz[40] a déjà remarqué que dans la musique on n'a pas encore appris à compter au-delà de 5; ce qui est aussi incontestablement vrai dans les instruments accordés selon les principes de l'harmonie. Mais, si ma conjecture a lieu, on peut dire que dans la composition on compte déjà

[39] [OO, 3a, I, 510]. Cf. infra notre compte rendu de l'explication de Rameau et d'Alembert. Dans un autre article, «Du véritable caractère de la musique moderne» (1764), Euler refusera, plus généralement, le concept même de dissonance : «Les musiciens conviennent bien que de tels accords ne sauraient être conciliés avec les principes de l'harmonie et ils tâchent de les soutenir par le nom de dissonance qu'ils leur imposent; mais, s'ils entendent par ce terme un tel accord où l'oreille ne saurait découvrir aucun rapport, on devrait pouvoir se servir avec autant de succès de tout autre mélange de tons, quelque absurde qu'il soit; ce que les musiciens sont bien éloignés d'admettre.» [OO, 3a, I, 524]

[40] Euler produit ici la citation que nous avons rapportée plus haut.

> jusqu'à 7 et que l'oreille y est déjà accoutumée[41]; c'est un nouveau genre de musique, qu'on a commencé à mettre en usage et qui a été inconnu aux anciens. Dans ce genre l'accord 4, 5, 6, 7 est la plus complète harmonie, puisqu'elle renferme les nombres 2, 3, 5 et 7; mais il est aussi plus compliqué que l'accord parfait dans le genre commun qui ne contient que les nombres 2, 3 et 5. Si c'est une perfection dans la composition, on tâchera peut-être de porter les instruments au même degré.» [OO, 3a, I, 515]

Selon Euler, la prédilection pour l'accord de dominante provient donc de ce qu'il est une consonance et non une dissonance. Il y a certainement du vrai dans cette conception. En réalité, ce point précis, comme l'ensemble de la théorie, doit être comparé aux explications modernes par la perception des battements entre les sons partiels des notes musicales. Ces explications, issues de la théorie de Helmholtz, confirment entièrement le principe de l'absence de stricte ségrégation entre consonances et dissonances. Le tout est de savoir jusqu'à quel son partiel l'oreille étend sa perception. Or cela dépend de deux facteurs; d'une part de l'intensité physique relative des sons partiels (l'expérience montre que, statistiquement[42], elle diminue quand l'ordre du son partiel augmente), d'autre part de la capacité physiologique et mentale de l'homme à percevoir les battements selon la hauteur des sons simples qui les produisent. Helmholtz lui-même reprendra ainsi l'idée de la consonance de la septième mineure «naturelle» correspondant au rapport 7/4[43].

Mais la théorie des battements indique également tout de suite les limites de la théorie d'Euler. Car outre le fait qu'elle explique pourquoi l'oreille se contente de rapports approximatifs, elle nous apprend que tous les sons partiels n'ont pas la même importance et qu'ainsi l'«exposant» d'un accord est loin d'être le seul nombre à caractériser son degré de consonance. En particulier, ajouter tous les diviseurs premiers de l'exposant pour parvenir à ce qu'Euler appelle un accord «complet» n'améliorera pas l'accord, comme l'imagine notre mathématicien, mais conduira plutôt à la cacophonie de sons partiels pléthoriques.

C'est pourquoi, en définitive, une autre approche du problème de la théorie musicale peut être souhaitable. Celle de Rameau et d'Alembert, contemporaine des travaux d'Euler, en est justement une. Au lieu de bâtir a priori, on partira de l'expérience, même si celle-ci contient des éléments inexplicables.

---

[41] Dans un autre article, Euler dit encore mieux : «nous pourrons dire avec feu Mr. de Leibniz que la musique a maintenant appris à compter jusqu'à sept.» [OO, 3a, I, 525]

[42] C'est-à-dire en moyenne selon les divers instruments. Seuls des instruments très timbrés comme la clarinette, présentent des sons partiels d'intensité élevée au-delà du dixième.

[43] Cf. Helmholtz, *op. cit.*, p. 249, 293 et 441 pour les références à l'accord de rapport 7/4. Cependant, Helmholtz rejette finalement cet accord, comme d'autres fondés sur le nombre 7, pour la raison que son renversement est «pire que lui-même». Et il conclut qu' «il existe donc une véritable lacune dans la série des intervalles rangés suivant leur harmonie, et c'est cette lacune qui forme la limite entre les consonances et les dissonances.» (p. 293).

### 3. Les *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau* (1re édition 1752)[44]

Bien que d'Alembert (1717-1783) soit de dix ans le cadet d'Euler et bien que ses *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau* aient paru en 1752, treize années après le *Tentamen*, il n'est pas déraisonnable de considérer la théorie du mathématicien français comme à peu près contemporaine de celle de son confrère suisse. En effet, l'essentiel de la théorie de d'Alembert avait déjà vu le jour, sous une forme moins «scientifique», à l'occasion des publications de Rameau (*Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* 1722, *Nouveau système de musique théorique* 1726, *Génération harmonique* 1737). Cependant, les conceptions des deux mathématiciens sont très différentes. Et en dépit de certains «points de contact», on va voir que le traité de d'Alembert peut être regardé comme tout à fait indépendant de celui d'Euler[45].

L'ouvrage de d'Alembert comportent deux parties : 1) une théorie générale de l'harmonie, 2) un abrégé des règles de composition. Comme le titre l'annonce, il est fondé sur les conceptions du musicien français Rameau. Celui-ci s'exprimait ainsi en mai 1752 :

> «M. d'Alembert […] a cherché dans mes Ouvrages […] des vérités à simplifier, à rendre plus familières, plus lumineuses, & par conséquent plus utiles au grand nombre […] Il n'a pas dédaigné de se mettre à la portée même des Enfants […] Enfin il m'a donné la consolation de voir ajouter à la solidité de mes principes une simplicité dont je les sentais susceptibles, mais que je ne leur aurais donnée qu'avec beaucoup plus de peine, & peut-être moins heureusement que lui […]. Les sciences & les arts […] hâteraient réciproquement leur progrès, si les Auteurs préférant l'intérêt de la vérité à celui de

---

[44] Je laisse de côté dans cet article, pour des raisons pratiques, les autres écrits de d'Alembert sur la musique, en particulier l'article *Fondamental* de l'*Encyclopédie*. Je compléterai cette lacune ultérieurement.

[45] Euler atteste une connaissance de la théorie de Rameau en correspondant avec lui, mais seulement après la parution du *Tentamen*. Les quelques articles annexes qu'il publie ensuite semblent justement montrer, comme on l'a vu, qu'Euler a pris conscience de l'existence de la théorie rivale de Rameau et d'Alembert *seulement après la publication de son Tentamen*. De son côté, d'Alembert connaissait certainement l'ouvrage d'Euler, mais n'en faisait sans doute pas grand cas (cf. *infra* la sévère critique qu'il lui adresse implicitement).

> l'amour propre, les uns avaient la modestie d'accepter des secours, les autres la générosité d'en offrir.» [EM, 211-212][46]

C'est assez dire que d'Alembert est resté fidèle à la pensée de Rameau, tout en la développant et l'amplifiant de manière remarquable[47].

L'Introduction des *Eléments de musique* situe bien le propos de son auteur. Le mathématicien entend d'abord fait œuvre totalement nouvelle, en négligeant les prédécesseurs (sauf Rameau, évidemment) [EM, vi]. Les théories grecques, ou qui s'en inspirent, sont repoussées :

> «Nous avons d'ailleurs banni […] toutes considérations sur les proportions & progressions géométriques, arithmétiques & harmoniques [……] proportions, dont nous croyons l'usage tout à fait inutile, & même, si nous l'osons dire, tout à fait illusoire dans la théorie de la Musique.» [EM, xii]

Se trouve exclue, de même, la théorie de *la coïncidence des coups*, qui, comme on l'a vu, constituait la théorie «normale» au temps de Galilée et Mersenne :

> «Les uns attribuent les différents degrés de plaisirs que les accords nous font éprouver, à la concurrence plus ou moins fréquente des vibrations […] Mais pourquoi la concurrence des vibrations, c'est-à-dire, leur direction dans le même sens, & la propriété de recommencer fréquemment ensemble, est-elle une si grande source de plaisir? Sur quoi est fondée cette supposition gratuite?» [EM, xxiv]

Se trouve exclue encore la théorie de l'ordre ou de la simplicité :

> «Les autres ]attribuent les différents degrés de plaisirs que les accords nous font éprouver[ à la simplicité plus ou moins grande du rapport [des vibrations]. […] Comment l'oreille est-elle si sensible à la simplicité des rapports, lorsque le plus souvent ces rapports sont inconnus à celui dont l'organe est d'ailleurs le plus vivement affecté par une bonne musique?» [*ibidem*][48]

C'est sans doute quelqu'un comme Euler qui est visé par ce passage, de même qu'un peu plus loin, lorsque d'Alembert stigmatise

---

[46] Je modernise l'orthographe comme je l'ai fait pour les quelques textes en français d'Euler. La référence, comme les suivantes de d'Alembert, renvoie aux *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau*, 2e édition, 1779 (réédition récente : Editions d'aujourd'hui, «Les introuvables», Plan-de-la-Tour, 1984 [la 1ère édition date de 1752] ).

[47] Par la suite, l'entente entre l'artiste et le mathématicien s'est gâtée, Rameau, apparemment «grisé» par son succès de théoricien, ayant prétendu fonder la Géométrie sur les expériences qui lui avaient servi de principes harmoniques! [EM, 212].

[48] D'Alembert ignore ici, volontairement ou non, la théorie leibnizienne de la musique comme *arithmétique inconsciente* (cf. par exemple P. Bailhache, *Leibniz et la théorie de la musique*, Klincksieck, coll. "Domaine musicologique", 1992, p. 147, 151). Cf. ici-même à la quatrième page de ce texte.

> «[…] ces Musiciens qui se croyant Géomètres, ou ces Géomètres qui se croyant Musiciens, entassent dans leurs écrits chiffres sur chiffres, imaginant peut-être que cet appareil est nécessaire à l'Art.» [EM, xxx][49]

Si toutes les théories qui précèdent ne recueillent que la désapprobation de d'Alembert, quelle est donc la sienne propre, ou du moins celle qu'il forme à partir des conceptions de Rameau?

> «Il ne faut point chercher ici cette évidence frappante, qui est le propre des seuls ouvrages de Géométrie, & qui se rencontre si rarement dans ceux où la Physique se mêle. Il entrera toujours dans la théorie des phénomènes musicaux une sorte de Métaphysique, que ces phénomènes supposent implicitement, & qui y porte son obscurité naturelle; on ne doit point s'attendre en cette matière à ce qu'on appelle *démonstration*; c'est beaucoup que d'avoir réduit les principaux faits en un système bien lié & bien suivi, de les avoir déduits d'une seule expérience, […]»

Cet «aveu», ainsi que l'appelle un peu plus loin d'Alembert, décrit le principe de sa démarche ou, pour le moins, la manière dont son auteur la perçoit. Fondée sur une expérience que je vais bientôt rappeler, la théorie musicale relève de la physique et non de la pure mathématique. Cela entraîne que l'on ne peut pas y obtenir de *démonstration* — d'Alembert réserve ce terme aux mathématiques — mais que l'on peut tout de même y pratiquer des *déductions*. Un lecteur moderne pourrait penser qu'entre démonstration et déduction la différence est mince. Mais ce n'est pas ainsi que d'Alembert interprète les mots. Alors que dans les mathématiques la démonstration est purement logique,

> «dans les matières de Physique […] il n'est guère permis d'employer que des raisonnements d'analogie & de convenance […].» [EM, xiv]

D'où résulte une absence de certitude totale, car

> «Il n'est pas surprenant, que dans un sujet où l'analogie seule peut avoir lieu, ce guide vienne à manquer tout à coup pour l'explication de certains phénomènes.» [EM, xv]

Selon d'Alembert, la théorie musicale est bien ici concernée, en tant que science physico-mathématique particulière (EM, xvii).

---

[49] Dans le «Discours préliminaire» à la seconde édition de ses *Eléments de musique*, d'Alembert mentionne aussi la «très belle» expérience des *sons résultants* de Tartini (EM, xix), dont le *Traité de l'harmonie* date de 1754. Puisqu'il s'agit d'une approche expérimentale, comme chez Rameau, d'Alembert la considère d'un œil favorable. «Mais son livre est écrit d'une manière si obscure, qu'il nous est impossible d'en porter aucun jugement; […] il serait à souhaiter que l'Auteur engageât quelque Homme de Lettres versé dans la Musique & dans l'art d'écrire, à développer des idées qu'il n'a pas rendu assez nettement […]» [EM, xx]

Nous allons maintenant exposer brièvement la théorie de Rameau et d'Alembert, afin de voir si le jugement épistémologique que porte ce dernier sur son propre travail est bien justifié.

Cette théorie débute de manière relativement simple[50] par deux «expériences» fondamentales sur lesquelles repose tout l'édifice. La première est celle du *corps sonore* qui, s'il résonne, fait entendre

> «outre le son principal & son octave, deux autres sons très aigus, dont l'un est la douzième au-dessus du son principal, c'est-à-dire l'octave de la quinte de ce son; & l'autre est la dix-septième majeure au-dessus de ce même son, c'est-à-dire la double octave de sa tierce majeure.» [EM, 14]

La seconde expérience est celle de la profonde ressemblance entre un son et son octave supérieure ou inférieure.

Bien entendu, ces expériences ne sont pas *justifiées*. Elles sont seulement des constats empiriques, à partir desquels sont tirés les principes fondamentaux de la théorie[51]. D'Alembert, cependant, n'ignore nullement que l'octave, l'octave de la quinte et la double octave de la tierce majeure correspondent respectivement aux sons de fréquence double, triple et quintuple de celle du son fondamental. Aussi note-t-il :

> «[Des physiciens], après avoir remarqué […] que la vibration totale d'une corde musicale est le mélange de plusieurs vibrations particulières, en concluent que le son produit par le corps sonore doit être multiple, comme il l'est en effet. Mais pourquoi ce son multiple n'en paraît-il renfermer que trois, & pourquoi ces trois préférablement à d'autres?» [EM, xxii]

Nous sommes ici apparemment très proche de la reconnaissance de la présence des harmoniques, ou *sons partiels*, dans tout son musical — d'autant que Sauveur les avait pratiquement constatés de manière expérimentale dans le cas des cordes vibrantes[52]. Mais nous en sommes en fait encore éloigné d'un siècle, car c'est seulement avec Helmholtz que la perception des sons partiels atteindra à un niveau de compréhension

---

[50] A en croire les paroles de l'auteur, la partie théorique de son livre est très simple : elle «ne suppose, ainsi que le dit l'*Introduction*, aucune autre connaissance de Musique, que celle des syllabes *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, que tout le monde connaît.» [EM, xxviii]

[51] «L'expérience seule […] doit être la base ]de la Musique[» [EM, xxi]. Il est remarquable que d'Alembert classe résolument l'acoustique parmi les sciences expérimentales, alors qu'une partie de la mécanique — la statique — reste située du côté des mathématiques (cf. ses tentatives de démonstration géométrique du principe de la composition des forces). Comme les Grecs et leurs successeurs jusqu'à Descartes, sinon Euler, plaçaient la musique dans les mathématiques, on peut y voir une marque de l'évolution générale des sciences «exactes».

[52] Cf. Sauveur, «Système général des intervalles et des sons, et son application à tous les systèmes et à tous les instruments de musique», *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1701, Section IX, «Des sons harmoniques», réimprimé in Joseph Sauveur, *Colleted Writings on Musical Acoustics (Paris 1700-1713)*, ed. by Rudolf Rasch, The Diapason Press, Utrecht, 1984, p. 149.

bien supérieur (il faudra pour cela disposer de la théorie mathématique des séries de Fourier). En réalité, d'Alembert ne souhaite nullement que les sons partiels supérieurs à l'harmonique 5 soient reconnus par l'oreille, car, comme nous allons le comprendre dans un instant, cela détruirait sa théorie de la musique.

En vertu de la seconde «expérience», la première permet de dire que tout son musical contient le fondamental, l'octave, la quinte et la tierce majeure. Voilà justifié l'accord le plus consonant de tous, l'accord parfait majeur (*ut mi sol ut*[53]).

> «Cet accord est l'ouvrage de la nature» [EM, 20]

Jusqu'ici nous avons bien une *déduction logique* d'un élément harmonique à partir des principes de la théorie. Les choses ne sont déjà plus si simples en ce qui concerne l'accord parfait mineur (*ut* $mi_b$ *sol ut*). Il s'agit de justifier la tierce mineure ($mi_b$). D'Alembert répond que ce son, comme le fondamental (*ut*), a la propriété de faire résonner la quinte (*sol*) qui lui est distante d'une tierce majeure. Et ainsi,

> «cet arrangement *ut* $mi_b$ *sol*, est aussi dicté par la nature […], quoique moins immédiatement que le premier; & en effet l'expérience prouve que l'oreille s'en accommode à peu près aussi bien.» [EM, 23][54]

Il faut reconnaître qu'à présent la déduction n'est plus purement logique, mais qu'il y entre un *choix*, c'est-à-dire une de ces raisons de *convenance* dont parlait d'Alembert dans le *Discours préliminaire*. Il va maintenant y en avoir bien d'autres.

Sitôt défini ces deux accords, qui constituent des éléments musicaux statiques c'est-à-dire harmoniques, d'Alembert introduit la notion de *basse fondamentale* : un chant, donc un élément dynamique c'est-à-dire mélodique, qui marchera par quinte (ou moins naturellement par tierce)[55]. Il ne lui est pas difficile, alors, de définir les modes et les gammes, comme conséquences de ce qui précède. Ainsi la basse fondamentale *fa*, *ut*, *sol*, accompagnée de ses sons harmoniques[56], définit-elle le mode majeur qui contient tous les sons *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si* (mais pas dans cet ordre). On remarquera qu'une nouvelle raison de «convenance» s'introduit en cette matière : pourquoi limiter la basse fondamentale à trois notes, sinon justement pour retrouver l'ensemble des sons de la gamme diatonique classique?

---

[53] Comme d'Alembert je donnerai des exemples en *ut* pour le mode majeur, en *la* ou *ut* pour le mode mineur.

[54] La supériorité scientifique de d'Alembert sur Rameau apparaît nettement à cette occasion, le musicien faisant appel à une troisième expérience, mal décrite, (il s'agit de celle de la vibration par influence) pour justifier l'accord parfait mineur.

[55] Les termes *statique* et *dynamique* sont de moi.

[56] Comme on l'a compris, par harmoniques, d'Alembert entend seulement les sons partiels de la première expérience.

Comment retrouver ensuite ces sons dans la disposition particulière et traditionnelle de la gamme diatonique? C'est une nouvelle difficulté que la théorie ne peut surmonter qu'au prix de nouveaux éléments arbitraires, toujours ces raisons de «convenance» annoncées dans le *Discours préliminaire*. A vrai dire, cette partie de la théorie prend l'aspect d'une *reconstruction*, au sens que ce terme a en histoire des sciences. Il s'agit de justifier le chant *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*. Or les notes de basse fondamentale *fa*, *ut*, *sol*, qui définissent à elles seules le mode d'*ut*, ne suffisent pas à ce résultat. Il faut y ajouter le son *ré*, et d'Alembert ne voit aucune raison justifiant cette complication[57]. Bien entendu, la gamme de Zarlino ne s'est pas historiquement formée comme le dit d'Alembert, puisqu'elle est le résultat d'une longue évolution mettant notamment en œuvre l'addition de plusieurs tétracordes. D'Alembert ne l'ignore pas. En fait, rien n'interdit de penser comme lui que la basse fondamentale a servi de guide, plus ou moins conscient, dans l'élaboration des gammes. Force est de reconnaître que le triomphe de la musique tonale classique trouve dans la notion de basse fondamentale un principe d'explication vraisemblable. Seule la théorie des sons partiels et des battements plus ou moins désagréables qu'ils engendrent, de Helmholtz, viendra supplanter celle de la basse fondamentale, d'ailleurs plus en la complétant qu'en la contredisant.

Bien des éléments sont exposés et expliqués dans l'ouvrage de d'Alembert, le tempérament, les cadences, la gamme mineure, toujours par ce mélange d'arguments directement tirés des deux expériences du corps sonore et de raisons qui ressortissent au domaine du goût[58]. Pour ne pas m'attarder, je me limiterai ici à la question des accords dissonants et de quelques notions sur leur emploi.

D'Alembert cherche d'abord un accord sur la dominante *sol*, caractérisant cette note comme quinte d'*ut* dans le mode d'*ut* majeur. L'accord parfait majeur *sol*, *si*, *ré* ne peut convenir, puisqu'il pourrait figurer en sol majeur ou en d'autres tons encore. En ajoutant la *dissonance fa*, c'est-à-dire en composant l'accord de septième de dominante *sol si ré fa*, on parvient au but [EM, 76-77][59]. Par des raisonnements analogues d'Alembert introduit de même l'accord qu'il appelle *de grande sixte*, *fa la ut ré*, ainsi que

---

[57] *fa*, *ut*, *sol* produisent, par la basse fondamentale *sol*, *ut*, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *fa*, ce que d'Alembert appelle l'échelle diatonique des Grecs : *si*, *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*. Pour que l'échelle démarre d'*ut* et non de *si*, il faut employer la basse fondamentale *ut*, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *sol*, *ré*, *sol*, *ut*. [EM, 30-39].

[58] Un exemple typique de ce mélange : les cadences, qui reposent l'oreille en satisfaisant son désir de revenir au *générateur*, c'est-à-dire à la tonique, doivent être pratiquées au moins toutes les quatre mesures. Un bon exemple, en revanche, de déduction directe est celui du §37 (p. 26) : deux accords parfaits ne peuvent se succéder diatoniquement).

[59] On a vu ci-dessus que cela est une explication rejetée par Euler.

son renversement *ré fa la ut*. Il faut comprendre que ces accords pourront être employés directement dans la basse fondamentale, à la place des accords parfaits.

La notion de dissonance est justifiée d'une manière analogue à celle qui avait servi à expliquer la consonance. Est consonant tout accord qui, par ses harmoniques, se trouve déjà dans la *nature*. Semblablement, est dissonante toute combinaison de sons qui ne peut être ramenée à un tel état naturel[60].

D'autres accords de septièmes sont encore mentionnés et utilisables dans la basse fondamentale [EM, 89]. Je ne parlerai que de l'accord de septième diminuée, dont la présentation de d'Alembert montre bien jusqu'où il lui faut parfois aller pour «reconstruire» les éléments de l'harmonie classique. Prenant l'exemple de *sol# si ré fa*, d'Alembert nous explique qu'on peut le considérer comme la réunion, dans le mode de *la* mineur, de l'accord de dominante *mi sol# si ré* et de l'accord de septième sur la sous-dominante *ré fa la si*, ce qui commence par donner *mi sol# si ré fa la*.

> «Or si l'on laissait subsister ainsi cet accord, il serait désagréable à l'oreille, à cause des dissonances multipliées, *ré mi*, *mi fa*, *la sol#*, *la si*, *ré sol#* […]; de sorte que pour éviter cet inconvénient, on retranche d'abord le générateur *la*, qui […] est comme sous-entendu dans *ré*, & la quinte ou dominante *mi*, dont la note sensible *sol#* est censée tenir la place; ainsi il ne reste plus que l'accord *sol# si ré fa* […]» [EM, 91]

Je crois qu'on comprendra nettement, sur un tel exemple, pourquoi un esprit habitué à la rigueur mathématique comme celui de d'Alembert insiste sur le caractère hypothético-déductif de la théorie de la musique.

De tout le reste, je ne dirai rien, afin de ne pas alourdir mon exposé. Le premier livre donne encore les règles de préparation et de résolution des dissonances dans les différents modes. Le second livre introduit notamment la *basse continue* : ce n'est autre chose que la basse fondamentale renversée (au sens où l'on parle aujourd'hui, en harmonie, des renversements d'un accord). La théorie harmonique se trouve ainsi très logiquement construite. En principe, la basse fondamentale ne doit porter que des accords parfaits et des accords de septième, plus l'accord de grande sixte. La basse continue, qui est celle qu'on joue réellement, admet ces accords et tous leurs renversements, accords de sixte, de quarte et sixte, de seconde, etc.

Est-il vrai, en définitive, qu'en théorie de la musique comme

> «dans les matières de Physique […] il n'est guère permis d'employer que des raisonnements d'analogie & de convenance […]»? [EM, xiv]

---

[60] D'Alembert s'exprime un peu moins clairement : «La raison qui rend la dissonance désagréable, c'est que les sons qui la forment ne se confondent nullement à l'oreille, & sont entendus par elle comme deux sons distincts, quoique frappés à la fois.» [EM, 13]

Un point, à ce sujet, mérite d'être souligné, ce sont les continuels *renvois* dont d'Alembert émaille son texte. En cela sans doute se reconnaît le mathématicien, plus encore que dans ses calculs, assez nombreux et seulement donnés en notes, des rapports numériques des intervalles. Le style de l'ouvrage s'apparente de manière évidente à celui d'un traité de géométrie, encore qu'on n'y trouve ni définitions, ni propositions, ni théorèmes, mais seulement des chapitres et des paragraphes. D'ailleurs cette différence même est certainement voulue. Il n'importe, ces *renvois* constituent la preuve que les raisonnements ne sont pas de pure analogie ou de «convenance», mais ressortissent également à la logique. Une lecture du traité de d'Alembert impressionne justement par la richesse de tout ce qui est déduit. Le plus étonnant, peut-être, est qu'on est en présence d'un vrai traité d'harmonie, théorique et pratique, comme l'annonce le titre. Contrairement à Euler, notre mathématicien français ne «divague» pas; il fait d'abord œuvre de musicien, du moins de théoricien de la musique. Il n'invente pas de nouvelles gammes ou de nouveaux accords pour satisfaire aux calculs. Il respecte les données de la musique tonale de son temps. Mais ce qui est remarquable, c'est qu'il tente également de les justifier par une démarche aussi rigoureuse que possible, et pas seulement, comme il le croit ou l'exprime faussement, par des raisonnements analogiques ou esthétiques, mais aussi par des déductions purement logiques.

Un autre point sur lequel le jugement que porte d'Alembert sur lui-même n'est pas tout à fait exact concerne le statut qu'il accorde à la science de la musique. Il l'assimile à la physique. Or il est parfaitement clair que cette science, même entendue au sens qu'elle avait en 1750, ne peut conduire à elle seule à un quelconque jugement de goût. Mais ne serait-il pas illusoire de vouloir assimiler les règles de l'harmonie classique, où l'on trouve de nombreuses conventions, aux lois de la physique qui, malgré leur lien avec l'expérience, jouissent d'un caractère de nécessité évidemment beaucoup plus fort[61] ? En fait, la liaison entre la pure physique du son et la qualité de sa perception, c'est-à-dire la liaison entre l'objectif et le subjectif, est réalisée par d'Alembert grâce à la notion de nature[62]. On peut lui reprocher de ne pas suffisamment le souligner. Cette

---

[61] On sait que c'est justement d'Alembert qui, à la question posée par l'Académie de Berlin «si les lois de la Statique et de la Mécanique sont de vérité nécessaire ou contingente?» répond de manière fort astucieuse par l'affirmation de la nécessité «non pas en ce sens que le Créateur n'eût pu établir des lois toutes différentes, mais en ce sens qu'il n'a pas jugé à propos d'en établir d'autres que celles qui résultaient de l'existence même de la matière.» (cf. *Traité de dynamique*, 1743, réédition Gauthier-Villars, Paris, 1921, discours préliminaire, p. xxxii et suiv.).

[62] On pourrait penser que la notion de *nature* n'apporte rien de nouveau, puisque la physique, c'est précisément la *science de la nature* (φύσις = nature). Mais c'est là son sens aristotélicien, pas le sens que lui a conféré la révolution scientifique galiléenne, en retranchant notamment de l'explication

nature, c'est le vrai, le bien et le beau réunis, ce qui explique qu'elle puisse fonder la partie esthétique des règles de la musique. Ceci est très important et témoigne du degré d'évolution atteint au milieu du XVIII$^{e}$ siècle par la théorie de la musique. Partie d'une croyance quasi religieuse en la vertu des nombres (pythagorisme, VI$^{e}$ s. AV JC), elle s'est lentement acheminée vers des conceptions plus «positives», l'analyse physiologique de l'oreille interne par Helmholtz constituant un aboutissement majeur dans cette conquête, comme on va bientôt le voir. A mi-chemin entre cet aboutissement et la théorie de la «coïncidence des coups» (ou son amplification arithmétique par Euler), l'œuvre musicale de d'Alembert représente une étape importante, historiquement très bien située et qui révèle en passant que le grand mathématicien, contrairement à d'autres[63], étaient aussi un homme bien versé dans l'art des sons.

En achevant notre exposé sur la théorie d'Euler, nous soulignions comment son caractère a priori en définissait les limites, ou du moins finissait par la situer en dehors de la réalité. Tous les sons partiels d'un son musical ne sont pas équivalents, ni physiquement ni physiologiquement; les prendre comme de simples diviseurs arithmétiques ne suffit pas pour rendre compte du phénomène musical. D'Alembert a compris ceci. Il faut partir de l'expérience et veiller à ne pas s'en écarter. Sa prudence est payée en retour. Dans le «corps sonore», les sons partiels d'ordre 2, 3, 5 sont perçus. Le reste ne serait que conjectures douteuses auxquelles le savant se refuse, à part une «seconde» expérience, celle de la parentée des octaves. Il n'est donc pas absurde de penser que les sons partiels d'ordre 4 et même 6 sont présents, encore qu'on ne les entende guère. Le résultat de ces observations explique, en partie, toute la valeur de la théorie de Rameau et d'Alembert : sans avoir pénétré le mystère

---

physique tout recours aux causes finales. Donc, faire appel à la nature à l'époque de d'Alembert, c'est bien ajouter quelque chose de plus à la physique; car la nature, dans toute son ampleur, contient encore bien des notions esthétiques et téléologiques, alors que la physique vient d'être «désacralisée».

[63] Si plusieurs hommes de sciences sont connus avoir possédé un réel talent de musicien, certains ont aussi avoué leur quasi-indifférence (par exemple, Lagrange : «on a dit qu'il n'était pas insensible aux charmes de la musique. En effet, quand une réunion était nombreuse, il n'était pas fâché qu'un concert vînt interrompre les conversations et fixer toutes les attentions. Dans une de ces occasions, je lui demandais ce qu'il pensait de la musique : *Je l'aime parce qu'elle m'isole; j'en écoute les trois premières mesures, à la quatrième je ne distingue plus rien, je me livre à mes réflexions, rien ne m'interrompt, et c'est ainsi que j'ai résolu plus d'un problème difficile*. Ainsi, pour lui, la plus belle œuvre de musique devait être celle à laquelle il avait dû les inspirations les plus heureuses.» in J.L. Lagrange, *Œuvres* (publiées par les soins de J.A. Serret), Gauthier-Villars, 1867, tome I, p. XLVII-XLVIII [notice de Delambre] ).

physiologique de l'audition musicale, elle réussit à parvenir à cette étape essentielle, l'importance fondamentale des premiers sons partiels.

### 4. La «*Théorie physiologique de la musique*» de Helmholtz (1863)

Dans les lignes qui précèdent, j'ai évoqué plusieurs fois cet ouvrage de Helmholtz pour dire qu'il apportait le juste point de vue sur la perception des sons partiels harmoniques et, conséquemment, sur l'évaluation des consonances. Je voudrais maintenant résumer les principaux éléments de sa théorie, afin de justifier cette affirmation.

Avant Helmholtz les tentatives d'explication des phénomènes musicaux ne dépassaient pas, si je puis dire, la barrière du tympan. Des théories sur la propagation du son existaient, on savait que le tympan était mis en vibration par l'air; mais savoir ce qui se produisait dans l'oreille interne, approfondir de ce fait la connaissance des rapports entre le phénomène physique de la vibration et la perception mentale du son, cela était au-dessus des forces de la science du XVIII$^{e}$ siècle.

Mais l'étude anatomique de l'oreille interne se perfectionne. On comprend que les vibrations tympaniques se transmettent au liquide du limaçon, lequel fait lui-même vibrer une surface de séparation entre deux cavités du limaçon, la membrane basilaire. Cette membrane est peu tendue dans le sens longitudinal de l'enroulement du limaçon, très tendue au contraire dans le sens transversal. Peu de temps avant les travaux acoustiques de Helmholtz, le marquis de Corti découvre par l'étude au microscope que le nerf auditif se ramifie et se termine par une multitude de prolongements sur la membrane basilaire (d'où le terme d'*organes de Corti*. donné à ces prolongements).

Devant cette énigme acoustique, Helmholtz réalise des merveilles d'interprétation qui lui permettent d'un coup de comprendre comment fonctionne l'oreille. Puisqu'elle n'est tendue que dans le sens transversal, la membrane basilaire peut être considérée comme mécaniquement équivalente à un très grand nombre de fibres (semblables à des cordes d'instrument de musique), juxtaposées les unes aux autres.

Dès lors, comme dans un piano, chacune de ces fibres se trouve «accordée» à une fréquence donnée et, sous l'action des mouvements du liquide du limaçon, vibre par influence, d'autant mieux que la fréquence excitatrice est plus voisine de sa fréquence propre. C'est ainsi que la membrane joue le rôle d'analyseur en fréquence des sons reçus, les terminaisons nerveuses associées aux fibres transmettant au cerveau le résultat de cette analyse physique.

Mais ce premier groupe de phénomènes physiologiques ainsi «démontés», il faut encore expliquer pourquoi certains sons produisent de l'agrément, d'autres non. Ici

Helmholtz avance une nouvelle hypothèse, en partie fondée sur l'expérience. C'est celle du désagrément des *battements* de deux sons. Le phénomène des battements était bien connu, à la fois en physique et en musique. Lorsque deux sons simples, c'est-à-dire d'amplitude sinusoïdale, de fréquence voisine, sont émis, on perçoit des battements dont la période est égale à la différence des périodes propres des deux sons. Si ces périodes sont très différentes, les battements sont trop lents pour être audibles. Si elles sont au contraire très voisines, les battements sont très rapides et ne sont plus nettement perçus (comme une image papillotante qui, à grande vitesse, donne l'impression de la continuité). En revanche, il existe une fréquence pour laquelle les battements sont nets et particulièrement désagréables. Helmholtz évalue à trente hertz[64] la fréquence de dureté maximale des battements et se donne une formule, arbitraire mais vraisemblable, quantifiant la *dureté propre* de deux sons simples en fonction de leurs fréquences. Mais la dureté propre n'est pas la *dissonance*. Celle-ci dépend aussi, évidemment, de l'énergie des battements. Helmholtz suppose cette dépendance linéaire et multiplie donc dureté propre par énergie pour obtenir la dissonance élémentaire de deux sons simples[65].

La dissonance de deux sons complexes, c'est-à-dire par exemple de deux notes exécutées au violon, est facile à quantifier à partir de ce qui précède. On considère deux à deux tous les partiels harmoniques des deux sons, on en calcule la dissonance et, supposant là encore que les effets s'ajoutent linéairement comme les causes, on fait la somme de toutes ces dissonances élémentaires. Aussi le résultat dépend-il du *timbre* de chaque son. Helmholtz fait un calcul dans le cas de ce qu'il croit être le timbre du violon et, tenant compte des neuf premiers sons partiels, parvient ainsi à une courbe générale de dissonance sur laquelle toute la suite de sa théorie de la musique est fondée[66].

---

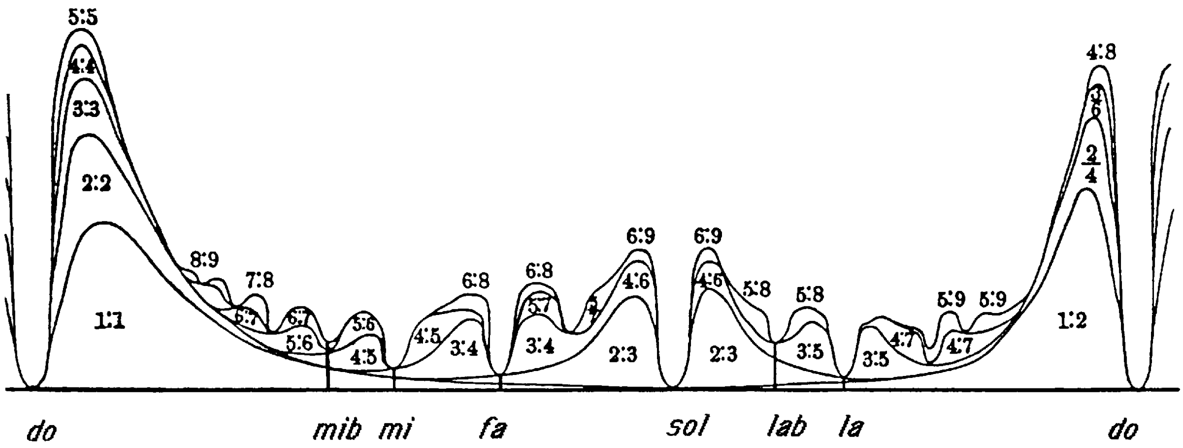
[64] Le hertz est l'unité de mesure d'une fréquence, égale au nombre de périodes qui se répètent pendant une seconde.

[65] Soit $\Delta f$ la différence des fréquences des sons simples produisant les battements. Helmholtz choisit comme expression de la dureté propre :

$$dp = \left[\frac{60\,\Delta f}{(30)^2 + \Delta f^2}\right]^2$$

une fonction dont le maximum est égal à l'unité lorsque $\Delta f = 30$. «C'est l'expression la plus simple qui remplisse les conditions données, mais elle naturellement arbitraire jusqu'à un certain point» (*op. cit.*, p. 528).

[66] Au lieu de prendre le timbre du violon tel qu'il est réellement entendu, Helmholtz adopte celui de la vibration de ses cordes (telle qu'on peut l'observer au microscope) : il est en fait très différent, car la résonance de la table d'harmonie et de la caisse apportent beaucoup de modifications. Le calcul (dont Helmholtz ne donne pas le détail) était certainement très fastidieux à la fin du XIX^e^ siècle; il est devenu aujourd'hui une simple affaire de programmation sur ordinateur.




La figure présente une succession de pics et de vallées qui correspondent respectivement aux dissonances et aux consonances. Les résultats concordent sans conteste avec ce que notre subjectivité nous apprend sur la nature des accords de deux sons. Dans l'ordre décroissant de consonance, les intervalles se classent selon la manière ordinaire : unisson (*do*), octave (*do*), quinte (*sol*), quarte (*fa*), sixte majeure (*la*), tierce majeure (*mi*), tierce mineure ($mi_b$) et sixte mineure ($la_b$). Dès qu'on s'éloigne tant soit peu de ces intervalles, la dissonance croît très vite, d'autant plus vite que la consonance non troublée était meilleure. Helmholtz semble être en droit de s'estimer satisfait :

> «Bien que la rigueur de cette théorie laisse encore beaucoup à désirer, elle nous suffit pour faire voir que notre hypothèse peut en réalité expliquer la répartition des dissonances et des consonances, telle que la fournit la nature»[67].

Mais en réalité, comme je l'ai montré dans l'article mentionné ci-dessus, tout ceci contient beaucoup de négligences et d'erreurs[68]. Les négligences sont involontaires et auraient pu être évitées par Helmholtz. Les erreurs, en revanche, sont dues au développement insuffisant de la science acoustique à l'époque du savant allemand. Je me contenterai de renvoyer à ma précédente analyse pour le détail de ces négligences et erreurs; elles exigeraient des considérations techniques hors de propos ici. Cependant, il faut bien comprendre que les conséquences en sont importantes — d'ailleurs à peu près toutes orientées dans le même sens, comme je le dirai tout à l'heure.

Il y a toutefois une négligence non involontaire qu'il n'est pas inutile d'expliquer, car cela permettra de mieux comprendre le fonctionnement de l'oreille comme analyseur de fréquence. Nous avons vu que Helmholtz calculait la dissonance élémentaire de deux sons simples comme le produit de l'énergie de leurs battements par une fonction de dureté propre, maximale pour trente hertz. La fonction de dureté propre joue le rôle

---

[67] *Ibidem*.

[68] *Op. cit.*, p. 315-316.

d'hypothèse physiologique de la théorie; comme dans tout système scientifique de nature hypothético-déductive, elle se justifie par les résultats qu'on en peut tirer et n'est justiciable d'aucune critique a priori. L'usage que Helmholtz fait de l'énergie des battements est en revanche beaucoup trop schématique. Expliquons-nous.

Soient $f_1$ et $f_2$ les fréquences des deux sons simples produisant des battements. Puisque seuls les battements désagréables nous intéressent, c'est que la différence de ces fréquences avoisine trente hertz, conformément à l'hypothèse physiologique élémentaire émise par Helmholtz. En toute généralité, chacun des deux sons fait résonner *par influence*, à sa fréquence, toutes les fibres de la membrane basilaire de l'oreille interne. Ainsi, toutes les fibres, étant excitées par les deux sons, sont le siège de battements. Il n'est pas difficile de montrer que, dans l'ensemble de la membrane, l'énergie de ces battements connaît deux maxima, pour des fibres dont la fréquence propre de vibration est voisine de $f_1$ ou $f_2$. Aux fréquences musicales, trente hertz représente peu de chose, de sorte que $f_1$ et $f_2$ peuvent être considérées comme peu différentes. Pour apprécier l'énergie des battements, Helmholtz se contente de la calculer *dans la fibre de fréquence moyenne* $\frac{(f_1 + f_2)}{2}$ [69]. Pourtant, la perception des battements doit évidemment dépendre de ceux qui apparaissent dans toutes les fibres, car l'oreille entend grâce à elles toutes. Helmholtz, qui le sait bien, argumente de la façon suivante afin de n'en garder qu'une seule, celle qui correspond à la fréquence moyenne :

> «Des battements plus faibles pourront encore, il est vrai, se produire dans des arcs fibreux voisins, mais avec une intensité rapidement décroissante. Aussi pourrait-on considérer comme plus exact d'intégrer, par rapport à [la fréquence propre des arcs fibreux] la valeur [de l'énergie des battements], de manière à avoir la somme des battements dans tous les organes de Corti. Mais il faudrait alors avoir une idée au moins approximative de la densité des organes de Corti pour différentes valeurs de [la fréquence], c'est-à-dire pour différentes régions de la gamme, et c'est ce qui nous manque. *En tout cas, dans la sensation, il est plus important de considérer le plus haut degré de dureté que la répartition d'une moindre dureté sur un grand nombre d'organes sentants*. C'est ce qui m'a décidé à ne prendre en considération que le maximum des battements [… ] »[70].

C'est déjà une première négligence que d'assimiler, sans autre forme de procès, deux maxima à un seul. Mais affirmer, comme je le souligne dans le texte cité, qu' «il est plus important de considérer le plus haut degré de dureté que la répartition d'une moindre dureté sur un grand nombre d'organes sentants», cela semble être un véritable sophisme. Chacun sait bien, en effet, que l'intégration d'une fonction de faible valeur sur un grand intervalle peut fort bien produire un résultat aussi grand, voire plus grand, que celle d'une fonction de grande valeur limitée à un petit intervalle. Quant à l'excuse

[69] Ce n'est donc pas là que l'énergie est maximale, mais puisqu'on suppose $f_1$ et $f_2$ voisines, les deux maxima sont rapprochés et l'énergie de la fréquence moyenne est presque maximale.

[70] *Op. cit.*, p. 528.

invoquée par Helmholtz pour justifier sa négligence de l'intégration, à savoir son ignorance complète de la répartition des fibres dans la membrane basilaire («et c'est ce qui nous manque»), elle n'est peut-être pas de la plus grande bonne foi. Certes, les coupes anatomiques ne permettaient pas encore à son époque de déterminer cette répartition, mais l'expérience auditive à elle seule pouvait déjà justement en donner une idée approximative[71].

En revanche, Helmholtz était parfaitement en mesure de deviner que la prise en compte de toutes les fibres risquait de ruiner, ou tout au moins d'affaiblir, sa théorie; car enfin, n'était-il pas intuitif que l'étalement de la dissonance sur toute la membrane basilaire diminuerait considérablement la sélectivité des intervalles musicaux du point de vue de leur consonance[72]. A la vérité, le refus par Helmholtz de l'intégration de la dissonance sur toutes les fibres vibrantes est assez surprenant. Certes, les calculs, déjà complexes sans cette intégration, en fussent devenus presque impossibles pour l'époque. Et cependant, Helmholtz était assez bon mathématicien pour savoir que l'intégrale d'une fonction presque partout faible n'est nullement négligeable à côté du pic que la fonction présente dans un endroit restreint. Remarquons toutefois que la phrase litigieuse commence par la restriction «dans la sensation». Cette précision est difficile à comprendre. On peut penser, ainsi que je l'ai suggéré[73], qu'elle fait implicitement référence au phénomène du *seuil* : en deçà d'une certaine valeur, l'intensité des battements ne contribuerait à aucune sensation, de sorte que l'intégrale des petites valeurs serait réellement négligeable. Ainsi, ce qui paraît une erreur mathématique deviendrait ainsi une vérité physiologique.

En définitive, bien des éléments sont négligés par Helmholtz, même la variation, avec la fréquence propre, de la masse et du coefficient d'amortissement des fibres de la membrane basilaire. Dès lors, les calculs présentés dans la *Théorie physiologique* sont presque illusoires. Une chose est sûre cependant; si l'on tente de les reprendre en y apportant toutes les corrections possibles[74], le résultat se dégage avec évidence : la fonction de dissonance que l'on obtient ressemble à celle de Helmholtz, mais les «vallées» sont beaucoup moins accentuées. Cela signifie que les consonances

[71] Cf. «Valeur actuelle de l'acoustique musicale de Helmholtz», *op. cit.*, p. 310. De la seule hypothèse que l'oreille présente des propriétés à peu près semblables sur quelques octaves, on déduit que la densité de répartition des fibres doit être inversement proportionnelle à la fréquence, dans les octaves considérées du moins. Aujourd'hui, l'anatomie confirme cette densité pour les octaves du médium.

[72] Le calcul confirme cette intuition.

[73] Cf. *op. cit.*, p. 311.

[74] *Ibidem*, p. 317-323.

devraient se manifester bien moins nettement que ne le prévoyait Helmholtz. Et pourtant, notre expérience musicale, lorsqu'elle a été convenablement *éduquée*, nous atteste que Helmholtz ne se trompait pas. Alors, qu'est-ce à dire? Je crois que la solution de cette difficulté n'est guère difficile à trouver. Précisément, pour percevoir nettement les accords musicaux l'oreille a besoin d'une éducation spécifique. Je pense que le pouvoir de discernement physique des consonances est très limité et correspond aux courbes aplanies qu'on obtient grâce aux corrections modernes. Mais perception n'est pas sensation. Au delà de la pure mécanique de l'oreille interne a lieu la transmission nerveuse de l'information. Dans ce domaine, le principe de la linéarité n'est nullement de rigueur. Chacun sait que les réflexes se conditionnent et s'acquièrent, ce qui doit s'expliquer par une structuration «cognitive» — comme on s'exprime aujourd'hui. Il est incontestable que l'éducation musicale relève en partie de ce genre d'acquisition. Cela suffit à expliquer la vraisemblance des résultats de Helmholtz.

## Conclusion

S'imaginer que l'histoire des sciences se déroule rationnellement selon un constant progrès, ce serait une naïveté hautement condamnable aujourd'hui, après tous les travaux qu'on a produits sur les notions de *rupture épistémologique*, de *paradigme* et autres *révolutions scientifiques*. S'imaginer en outre que la science pourrait «expliquer» la musique, c'est-à-dire tout ce qu'est susceptible d'exprimer tel prélude de J.S. Bach, tel concerto de Mozart, tel quatuor de Beethoven ou le *Sacre du printemps*, ce serait vraiment une cuistrerie intolérable et ridicule.

Sur le premier point toutefois, sans entrer dans des considérations de nature métaphysique, on ne contestera tout de même pas qu'il a «globalement» progrès scientifique; je pense justement que l'histoire des théories de la musique s'accorde avec cette idée générale. De toute évidence, l'explication physico-physiologique des sensations sonores approche la «réalité» de bien plus près qu'une simple mise en relation des phénomènes avec la théorie euclidienne des proportions. Du reste, comme cela arrive fréquemment en science physique, la théorie récente ne contredit pas entièrement la théorie ancienne. Plus que d'une opposition, il s'agit d'une généralisation dans laquelle l'ancienne théorie apparaît comme un cas limite, ou un cas «tronqué», de la nouvelle. Et c'est notamment en cela qu'il est possible d'affirmer qu'il y a eu progrès; car si la physiologie de l'oreille interne peut expliquer à rebours l'importance des rapports simples entre fréquences sonores, l'inverse n'est pas concevable : les lois des proportions n'expliquent pas le fonctionnement de l'oreille interne!

Quant au second point, il faut reconnaître que la science explique bien peu de choses, sinon rien, en comparaison de tout ce que la musique transmet. Autant l'admettre sans discussion. Peut-être la leçon à tirer des études de théorie musicale est-elle que, aussi loin que l'art des sons se développera, dépassant la tonalité et le pur emploi des notes, il n'en devra pas moins toujours compter avec la part *naturelle* que toute œuvre doit contenir : pour la respecter directement ou pour s'y opposer. Cette nature, c'est ce que notre oreille, de par son anatomie et à travers son éducation, est capable de comprendre et d'apprécier.

* A paraître dans *Littérature, médecine, société*, 13, Université de Nantes.